





GUÍA DE ESTUDIO

CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

RAMÓN BRUZUAL - MARISELA DOMÍNGUEZ



CARACAS, 2016

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la primera parte del curso de Análisis II de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela y son el resultado de la experiencia de los autores en el dictado de dicho curso.

En este curso se debe dar una visión rigurosa del cálculo en varias variables. Se supone que el estudiante ya ha visto un curso riguroso de cálculo en una variable, que domina la topología básica de la recta y que ha visto un curso introductorio de cálculo en varias variables.

Los siguientes temas son tratados en forma exhaustiva:

(1) $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico:

Métricas. Ejemplos, bolas, esferas, diámetro.

Conjuntos abiertos, vecindades. Conjuntos cerrados.

Métricas equivalentes.

Conjuntos densos. Separabilidad. Bases. Límites. Sucesiones de Cauchy. Completitud. Compacidad.

(2) Límites y continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

(3) Derivadas en $\mathbb{R}^n$, derivadas parciales y direccionales, gradiente.

Funciones compuestas y la regla de la cadena.

Teorema del valor medio. Aplicaciones geométricas, planos tangentes.

Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor.

Teoremas de la función implícita y de la función inversa.

Extremos, multiplicadores de Lagrange.

Tanto el trabajo de mecanografía como la elaboración de los gráficos estuvo a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.

Marisela Domínguez.

Julio 2005.

Contenido

CAPÍTULO 1

El espacio métrico $\mathbb{R}^n$.

1. Nociones básicas de espacios vectoriales. Producto interno. Norma.

Definición 1.1. Un *espacio vectorial* (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales) es un conjunto V en el que están definidas dos operaciones, $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, que satisfacen:

(i) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in V$;
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in V$;
(iii) Existe un elemento, $0 \in V$, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in V$;
(iv) Para cada $x \in V$ existe otro elemento, $-x \in V$, tal que $x + (-x) = 0$;
(v) $1 \cdot x = x$ para todo $x \in V$;
(vi) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in V$;
(vii) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$;
(viii) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Ejemplo 1.2.

(a) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con las operaciones usuales es un espacio vectorial.
(b) Sea n un entero positivo, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

es un espacio vectorial.
(c) Sean n y m enteros positivos, el espacio de las matrices $m \times n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, con las operaciones usuales es un espacio vectorial.
(d) El conjunto de los polinomios con las operaciones usuales es un espacio vectorial.
(e) Sea A un conjunto, el conjunto de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$, con las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x),$$

es un espacio vectorial.

(f) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \text{f es continua}\}$, con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x),$$

$\mathcal{C}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Definición 1.3. Sea V un espacio vectorial. Un *producto interno* en V es una función $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in V$,
(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$,
(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ para todo $x, y \in V$,
(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
(v) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para todo $x, y, z \in V$.

Ejemplo 1.4.

(a) Para $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sea

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Entonces $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ sea

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

Entonces $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{C}[a,b]$.

Ejercicio 1.5. Interpretar geométricamente el producto interno en $\mathbb{R}^n$ definido en el ejemplo anterior para los casos $n = 2$ (el plano) y $n = 3$ (el espacio) y concluir que el producto interno de dos vectores es igual al producto de sus longitudes por el coseno del ángulo que forman.

Proposición 1.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea V un espacio vectorial y sea $\langle \ , \ \rangle$ un producto interno en V. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} \, (\langle y, y\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $x, y \in V$. Además se cumple la igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración. Sean $x, y \in V$. Entonces

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$\langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

de donde se concluye que

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

y de esto último se deduce inmediatamente la desigualdad.

El resto de la demostración se deja como ejercicio. □

Corolario 1.7.

(a) *Si* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) *Si* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas, entonces*

$$\left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los productos internos dados en el Ejemplo 1.4.

□

Definición 1.8. Sea V un espacio vectorial, una *norma* en V es una función $\|\,\|: V \to \mathbb{R}$, que satisface:

(i) $\| x \| \geq 0$ para todo $x \in V$,
(ii) $\| x \| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
(iii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$,
(iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ para todo $x, y \in V$.

Ejemplo 1.9.

(a) Las funciones

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$
$$\| (x_1, \ldots, x_n) \|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

definen normas en $\mathbb{R}^n$.

(b) Las funciones

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$
$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

definen normas en $\mathcal{C}[a,b]$.

Proposición 1.10. *Sea V un espacio vectorial. Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en V y para $x \in V$ definimos $\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, entonces $\| \ \|$ es una norma en V.*

Demostración. Sean $x, y \in V$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ &\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \| y \| = (\| x \| + \| y \|)^2, \end{aligned}$$

de donde $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

El resto de las propiedades se prueban sin ninguna dificultad.

□

Corolario 1.11.

(a) $\| (x_1, \dots, x_n) \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ *define una norma en $\mathbb{R}^n$,*

(b) $\| f \| = \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ *define una norma en $\mathcal{C}[a,b]$.*

Ejercicio 1.12.

(a) Demostrar que si $\| \ \|$ es una norma en el espacio vectorial V que ha sido definida a partir de un producto interno entonces se satisface la siguiente igualdad (ley del paralelogramo):

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2,$$

para todo $x, y \in V$.

(b) Dar ejemplos de normas que no es posible definirlas a partir de un producto interno.

2. Definición de espacio métrico. Ejemplos. Bolas. Diámetro.

Definición 1.13. Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto y $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función tal que:

(i) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$,

(ii) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ para todo $x, y \in X$,
(iv) $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$.

La función d se llamará *métrica* (o *distancia*) y los elementos de X se llamarán puntos.

Es importante notar que no se supone que el conjunto X tenga estructura de espacio vectorial.

Ejemplo 1.14.

(a) $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$ define una métrica en $\mathbb{R}$.
(b) Todo subconjunto de un espacio métrico también es un espacio métrico.
(c) Sea X cualquier conjunto, definamos

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

d es una métrica en X.

Proposición 1.15. *Sea V un espacio vectorial y sea $\| \ \|$ una norma en V. Entonces la función d definida por* $\mathrm{d}(x,y) = \| x-y \|$ *es una métrica en V.*

La demostración de la Proposición anterior es muy sencilla y quedará como ejercicio.

Ejercicio 1.16. Dar ejemplos de espacios vectoriales con métricas que no se pueden definir a partir de normas.

Ejemplo 1.17. Como consecuencia de la proposición 1.15 y los ejemplos que han sido estudiados tenemos que:

(a) En $\mathbb{R}^n$ las siguientes funciones son métricas:
   (1) $\mathrm{d}_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$,
   (2) $\mathrm{d}_\infty(x,y) = max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}$,
   (3) $\mathrm{d}_1(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|$,
   (4) Más generalmente (ver ejercicio 1), para $p \in [1, +\infty)$,
   $\mathrm{d}_p(x,y) = (|x_1-y_1|^p + \ldots + |x_n-y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,

   donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$
(b) En $\mathcal{C}[a,b]$ las siguientes funciones son métricas:
   (1) $\mathrm{d}_1(f,g) = \int\limits_a^b |f(t)-g(t)|dt$,

(2) $\mathrm{d}_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $\mathrm{d}_\infty(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|$.

(c) El intervalo $[0,1]$ con la métrica $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$ es un espacio métrico.

Definición 1.18. Sea (X,d) un espacio métrico, $a \in X$, $r \in (0,+\infty)$.
La *bola abierta con centro a y radio r* es el conjunto

$$B(a,r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x,a) < r\}.$$

La *bola cerrada con centro a y radio r* es el conjunto

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x,a) \leq r\}.$$

Notar que la bola abierta no incluye el borde, la bola cerrada sí lo incluye.

Ejercicio 1.19. Representar gráficamente la bola abierta y la bola cerrada con centro 0 y radio 1 para los siguientes espacios métricos:

(a) $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2)$,
(b) $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_\infty)$,
(c) $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$.

en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Definición 1.20. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subset X$.
Se dice que A es *acotado* cuando existen $a \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(a,r)$.
Si $x \in X$, la *distancia* de x a A se define como

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf\{\mathrm{d}(x,y) : y \in A\}.$$

El *diámetro* de A es

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}.$$

Proposición 1.21. *Sea $A \subset X$. A es acotado si y sólo si el diámetro de A es finito.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

3. Sucesiones.

Sea (X,d) un espacio métrico.

Definición 1.22. Una *sucesión* en (X,d) es una función de $\mathbb{N}$ en X.

NOTACIÓN. Es usual utilizar las letras a, b, c para denotar sucesiones. Si a es una sucesión, en vez de escribir $a(k)$, suele escribirse a_k.

La sucesión a se suele denotar por $\{a_k\}$, (a_k) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

DEFINICIÓN 1.23. Una sucesión $\{a_k\}$ es *acotada* si el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es un conjunto acotado.

Como ejercicio, probar:

PROPOSICIÓN 1.24. *Una sucesión* $\{a_k\}$ *es acotada si y sólo si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{diam}\{a_1, a_2, \ldots\} \leq M$.

3.1. Límites.

DEFINICIÓN 1.25. Una sucesión $\{a_k\}$ *converge en* (X, d) *a un punto* $L \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $k > N$ entonces $\mathrm{d}(a_k, L) < \varepsilon$.

Abreviado:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = L \text{ en } (X, \mathrm{d}).$$

DEFINICIÓN 1.26. La sucesión $\{a_k\}$ es *convergente*, o *converge*, si existe $L \in X$ tal que $\lim_{k \to \infty} a_k = L$ en (X, d).

La sucesión $\{a_k\}$ es *divergente*, o *diverge*, cuando no converge.

EJEMPLO 1.27.

(a) En $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_2)$ sea $a_k = \dfrac{1}{k}$. Entonces $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

(b) En $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$ sea $a_k = \left(3 - \dfrac{1}{k^2}, k \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{k}\right)\right)$. Entonces

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \left(3 - \frac{1}{k^2}, k \operatorname{sen}\left(\frac{2}{k}\right)\right) = (3, 2).$$

3.2. Sucesiones de Cauchy.

DEFINICIÓN 1.28. Sea $\{a_k\}$ una sucesión. Diremos que $\{a_k\}$ es *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{d}(a_k, a_m) < \varepsilon$ si $k, m > N$.

Geométricamente esto quiere decir que a medida que k crece los términos de la sucesión se van juntando.

PROPOSICIÓN 1.29. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{a_k\}$ una sucesión convergente. Sea $L = \lim_{k\to\infty} a_k$ en (X, d). Dado $\varepsilon > 0$ sea N tal que $\mathrm{d}(a_k, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > N$.
Si $k, m > N$ entonces

$$\mathrm{d}(a_k, a_m) \leq \mathrm{d}(a_k, L) + \mathrm{d}(L, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego $\{a_k\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Ejemplo 1.30.

(a) Las dos sucesiones dadas en el Ejemplo 1.27 son de Cauchy.

(b) En $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_2)$ sea $a_k = (-1)^k$. Dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathrm{d}_2(a_k, a_{k+1}) = 2$. Así que $\{a_k\}$ no es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto $\{a_k\}$ no converge.

(c) En $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$ sea $a_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k)$. Dado $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{d}_2(a_k, a_{k+1}) = \sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)^2 + 4} \geq 2.$$

Luego $\{a_k\}$ no es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto no converge.

Teorema 1.31. *En un espacio métrico, toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Sea $\{a_k\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d), entonces existe N tal que $\mathrm{d}(a_k, a_m) < 1$ si $k, m \geq N$. Sea

$$M = \max\{\mathrm{d}(a_k, a_m) : k, m \leq N\}.$$

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Si $x, y \in A$ entonces

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, a_N) + \mathrm{d}(a_N, y) \leq 2\max\{M, 1\}.$$

Luego

$$\mathrm{diam}(A) \leq 2\max\{M, 1\}.$$

Por lo tanto, el diámetro de A es finito. □

Corolario 1.32. *En un espacio métrico, toda sucesión convergente es acotada.*

4. Completitud.

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 1.33. X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Ejemplo 1.34. $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_2)$ es un espacio métrico completo.

El resultado del ejemplo anterior es un teorema conocido del análisis en $\mathbb{R}$. En el próximo teorema lo extenderemos al caso de n variables.

Ejemplo 1.35. $((0,1), \mathrm{d}_2)$ no es un espacio métrico completo. Para probar esto basta observar que la sucesión dada por $a_k = \frac{1}{k}$ es de Cauchy pero no converge a un punto de $(0,1)$.

Teorema 1.36. $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2)$ *es completo.*

Demostración. Sea $\{a^k\}_k$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Entonces

$$a^k = (a_1^k, \dots, a_n^k),$$

donde, para $j = 1, \dots, n$, $\{a_j^k\}_k$ es una sucesión de números reales.

Primero probaremos que para cada $j = 1, \dots, n$, la sucesión $\{a_j^k\}_k$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_2)$. Notemos que

$$|a_j^k - a_j^m| \leq \sqrt{(a_1^k - a_1^m)^2 + \ldots + (a_n^k - a_n^m)^2} \leq \|a^k - a^m\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^k - a^m\| < \varepsilon$ si $k, m > N$. Luego $|a_j^k - a_j^m| < \varepsilon$ si $k, m > N$.

Por lo tanto, $\{a_j^k\}_k$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_2)$.

Como $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_2)$ es completo, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $L_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} a_j^k = L_j \text{ en } (\mathbb{R}, d_2).$$

Sea $L = (L_1, \dots, L_n)$.

Para terminar probaremos que $\{a^k\}_k$ converge al punto L en $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Notemos que

$$\|a^k - L\| = \sqrt{(a_1^k - L_1)^2 + \ldots + (a_n^k - L_n)^2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\gamma = \varepsilon / \sqrt{n}$, entonces para cada $j = 1, \dots, n$ existe N_j tal que si $k > N_j$ entonces $|a_j^k - L_j| < \gamma$.

Sea $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$ entonces $|a_j^k - L_j|^2 < \gamma^2$ si $k > N$.

Luego

$$\|a^k - L\| \leq \sqrt{\gamma^2 + \ldots + \gamma^2} = \sqrt{n}\gamma = \varepsilon$$

si $k > N$. De donde

$$\lim_{k\to\infty} a^k = L \text{ en } (\mathbb{R}^n, d_2).$$

Hemos probado que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es convergente. Por lo tanto $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es completo.

□

5. Abiertos, cerrados, densidad, frontera, métricas equivalentes.

Definición 1.37. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$.
A es *abierto* si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.
A es *cerrado* si su complemento $A^c = X - A$ es abierto.

Ejemplo 1.38.

(a) $\emptyset$ y X son abiertos y cerrados en cualquier espacio métrico (X, d).
(b) En $(\mathbb{R}, d_2)$: $(0, 1)$ es abierto.
(c) En $(\mathbb{R}, d_2)$: $[0, 1]$ es cerrado.
(d) En $(\mathbb{R}, d_2)$: $[0, 1)$ no es abierto ni cerrado.
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } x \geq 0\}$ no es ni abierto ni cerrado en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
(h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}^3, d_2)$.
(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ no es abierto en $(\mathbb{R}^3, d_2)$.
(j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

Ejercicio 1.39. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$.
Demostrar que $B(x, r)$ es abierto en (X, d) y que $\overline{B}(x, r)$ es cerrado en (X, d).

Proposición 1.40.

(a) *La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
(b) *La unión de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
(c) *La intersección de una familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
(d) *La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

La demostración queda como ejercicio.

Observación 1.41. Puede ocurrir que la intersección de una familia infinita de abiertos no sea abierto, dar ejemplos.

DEFINICIÓN 1.42. Sea (X, d) un espacio métrico.
Si $a \in X$, una *vecindad* o *entorno* de a en X es un conjunto abierto V tal que $a \in V$.
Sea $A \subset X$.
Se dice que $a \in A$ es un *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.
El *interior de A* es:

$$\text{int}(A) = \{x \in X : x \text{ es un punto interior de A}\}.$$

EJEMPLO 1.43.

(a) $(0, 1)$ es el interior de $[0, 1]$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.
(b) $(0, 1) \times (3, 5)$ es el interior de $[0, 1) \times (3, 5]$ en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es el interior de $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

PROPOSICIÓN 1.44.

(a) $\text{int}(A) \subset A$.
(b) $\text{int}(A)$ *es abierto.*
(c) *Si* B *es un abierto y* $B \subset A$ *entonces* $B \subset \text{int}(A)$.

Esto se expresa diciendo que $\text{int}(A)$ *es el mayor abierto contenido en* A.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 1.45. *A es abierto si y sólo si $A = \text{int}(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A = \text{int}(A)$. Por la proposición anterior $\text{int}(A)$ es abierto. Luego A es abierto.

Supongamos que A es abierto. Ya sabemos que $\text{int}(A) \subset A$. Veamos que $A \subset \text{int}(A)$. Sea $a \in A$, como A es abierto existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Luego a es un punto interior de A.

□

5.1. Puntos de acumulación. Clausura de un conjunto.

Sea (X, d) un espacio métrico.

DEFINICIÓN 1.46. Sean $x \in X$, $A \subset X$. Se dice que x es un *punto de acumulación* de A o *un punto límite* de A cuando para cada $r > 0$ se tiene que

$$A \cap (B(x, r) - \{x\}) \neq \emptyset.$$

EJEMPLO 1.47.

(a) 0 es un punto de acumulación de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.

(b) 3 es un punto de acumulación de $(3,7)$.

(c) -1 es un punto límite de $\{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.

Notación. Sea $A \subset X$,

$$A' = \{x \in X : x \text{ es un punto limite de } A\}.$$

Ejemplo 1.48. Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $A' = \{0\}$. Este ejemplo muestra que puede ocurrir que A' no está contenido en A.

Proposición 1.49. *Sea A un subconjunto de X. A es cerrado si y sólo si todo punto límite de A pertenece a A.*

Demostración. Tenemos que $\emptyset$ y X son abiertos y cerrados a la vez.

($\Leftarrow$) Supongamos que $A \neq X$. Entonces $A^C \neq \emptyset$. Por hipótesis $A' \subset A$.

Sea $x \in A^C$, entonces $x \notin A'$. Luego existe $r > 0$ tal que $A \cap (B(x,r) - \{x\}) = \emptyset$. De donde $B(x,r) \subset A^C$.

Por lo tanto A^C es abierto.

($\Rightarrow$) Supongamos que A^C es abierto. Si $x \notin A$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A^C$, de donde $A \cap B(x,r) = \emptyset$. Luego $A \cap (B(x,r) - \{x\}) = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin A'$.

Hemos probado que $A^C \subset (A')^C$. Luego $A' \subset A$. □

Definición 1.50. Sea $A \subset X$. La *clausura* de A es la unión de A con el conjunto de todos sus puntos límites. Es decir, la clausura de A es: $\overline{A} = E \cup A'$.

Ejemplo 1.51.

(a) Sea $A = \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, d_6)$ su clausura es:

$$\overline{A} = \{0\} \cup \{1/k : k \in \mathbb{N}\}.$$

(b) $[0,1]$ es la clausura de $(6,1)$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.

Proposición 1.52.

(a) *$A \subset \overline{A}$.*

(b) *$\overline{A}$ es cerrado.*

(c) *Si C es un cerrado y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$.*

Esto se expresa diciendo que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Proposición 1.53. *A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Ejercicio 1.54. Demostrar que, en $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2)$, la bola cerrada con centro a y radio r es la clausura de la bola abierta con centro a y radio r.

5.2. Densidad. Separabilidad. Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 1.55. Sea $A \subset X$, decimos que A es *denso* en X cuando $\overline{A} = X$.

Ejemplo 1.56. Q es denso en $\mathbb{R}$ con la métrica d_2.

Definición 1.57. Decimos que el espacio métrico (X, d) es *separable* cuando X contiene un subconjunto denso y numerable.

Ejemplo 1.58.

(a) $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_2)$ es separable pues Q es denso y numerable.
(b) $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2)$ es separable pues Q^n es denso y numerable.

5.3. Frontera de un conjunto. Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 1.59. Sea A un subconjunto de X, la *frontera* de A es:

$$\partial A = \{x \in X : A \cap B(x, r) \neq \emptyset \text{ y } A^C \cap B(x, r) \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0\}.$$

Ejemplo 1.60.

(a) En $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$, la bola abierta de centro a y radio r es abierto, no es cerrado. Su frontera es la circunferencia con centro a y radio r.
(b) En $(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}_2)$, la bola cerrada de centro a y radio r es cerrado, no es abierto. Su frontera es la esfera con centro a y radio r.
(c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. El conjunto A es cerrado, no es abierto, su frontera es él mismo: $\partial A = A$.
(d) $\mathbb{R}^2$ es abierto, también es cerrado y su frontera es $\emptyset$.
(e) Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

A no es abierto, no es cerrado y su frontera es

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

(f) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^8 + y^2 < 1\}$ es abierto, no es cerrado. Su frontera es

$$\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x^4 + y^2 = 3\}.$$

(g) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9,\ x^2 + y^0 < 1\}$ no es abierto, no es cerrado. La frontera es

$$\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

5.4. Métricas equivalentes.

Definición 1.61. Sean d, d′ dos métricas en X se dice que son *equivalentes* ($\mathrm{d} \sim \mathrm{d}'$) cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\,\mathrm{d}'(x, y) \leq \mathrm{d}(x, y) \leq M\,\mathrm{d}'(x, y)$$

Ejercicio 1.62.

(a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
(b) Demostrar que dos métricas equivalentes dan origen a la misma familia de abiertos.

Ejercicio 1.63. Demostrar que en $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1, d_2 y d_∞ son equivalentes.

6. Funciones continuas.

Sean (Z, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos.

Definición 1.64. Sean $D \subset X$, $a \in X$ un punto de acumulación dy D, $f : D \to Y$ una función y $L \in Y$. Decimos que *el límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto a es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y si $0 < \mathrm{d}_X(x, a) < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x), L) < \varepsilon$. Abreviado:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definición 1.65. Sean $D \subset X$, $a \in D$, $f : D \to Y$ una función. Decimos que f *es continua en a* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 7$ tal que si $x \in D$ y sh $\mathrm{d}_X(x, a) < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Observación 1.66. Notar que si a es un punto de acumulación de D entonces f es continua en a si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definición 1.67. Sean $D \subset X$ y $f : D \to Y$ una función . Decimos que f es *continua en D* cuando f es continua en a para todo $a \in D$.

Lema 1.68. *Sea $f : X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua en $a \in X$*
(b) *para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon).$$

Teorema 1.69. *Sea $f : X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua en X.*
(b) *$f^{-1}(G)$ es abierto en X para todo abierto $G \subset Y$.*

Demostración.
(a) $\Rightarrow$ *(b)* Sean G abierto en Y y $a \in f^{-1}(F)$. Entonces $f(a) \in G$.

Como G es abierto en Y entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset G$. De la continuidad de f y del Lema anterior, sigue que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon).$$

De donde

$$B_X(a, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

(b) $\Rightarrow$ *(a)* Sean $\varepsilon > 0$, $a \in X$. Como $B_Y(f(a), \varepsilon)$ es abierto en Y entonces $f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$ es abierto en X y contiene al punto a. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(a, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon)).$$

Luego

$$f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon).$$

Por el Lema anterior f es continua en X. □

Definición 1.70. Sean $D \subset X$, y $f : D \to Y$ una función. Decimos que f es uniformemente continua en D cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x', x" \in D$ y $0 < \mathrm{d}_X(x', x") < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x'), f(x")) < \varepsilon$.

7. Compacidad en $\mathbb{R}^n$.

Supondremos conocido el hecho de que todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$ posee al menos un punto acumulación.

Teorema 1.71 (Bolzano-Weierstrass). *Todo subconjunto infinito y acotado de $(\mathbb{R}^n, d_2)$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto infinito y acotado. Entonces existe una sucesión $\{\vec{a}_k\}_k \subset A$ tal que $\vec{a}_k \neq \vec{a}_p$ si $k \neq p$.

Tenemos que $\vec{a}_k = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$, donde cada una de las sucesiones $\{a_i^{(k)}\}_k$ es una sucesión acotada de números reales. Por lo tanto $\{a_1^{(k)}\}_k$ tiene una subsucesión convergente $\{a_1^{k_j}\}_j$, $\{a_2^{(k_j)}\}_j$ tiene una subsucesión convergente $\{a_2^{(k_{jj})}\}_j$, si continuamos con este proceso

obtenemos una subsucesión $\{\vec{b}_k\}_k$ de $\{\vec{a}_k\}_k$ tal que cada sucesión coordenada de $\{\vec{b}_k\}_k$ converge y por lo tanto $\{\vec{b}_k\}_k$ converge. El límite de esta sucesión es un punto límite del conjunto A.

□

COROLARIO 1.72. *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente.*

DEFINICIÓN 1.73. Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *compacto* si es cerrado y acotado.

(En el curso de topología se encontrarán con otra definición de compacto, que en el caso de $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la anterior)

TEOREMA 1.74 (Heine-Borel). *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *A es compacto.*

(b) *Todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos (a)

Sea S un subconjunto infinito de A.

Como A es acotado, S tiene que ser acotado.

Por lo tanto S tiene un punto de acumulación, por ser A cerrado este punto de acumulación debe estar en A.

Supongamos (b)

A debe ser cerrado puesto que (b) implica que A contiene todos sus puntos de acumulación. Si A no es acotado entonces se puede construir una sucesión de elementos de A cuya norma tiende a $+\infty$. El conjunto formado por los términos de esta sucesión no puede tener un punto de acumulación. Por lo tanto A debe ser acotado. □

8. Espacios topológicos.

Si Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ para denotará al conjunto de partes de Ω.

DEFINICIÓN 1.75. Un *espacio topológico* es un par $(\Omega, \mathcal{T})$, donde Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{T}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que

(i) $\emptyset$ y Ω pertenecen a $\mathcal{T}$

(ii) La unión de una familia de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

(iii) La intersección de usa familia finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

En este caso se dice que $\mathcal{T}$ es una *topología* en Ω y se dice que los elementos de $\mathcal{T}$ son *conjuntos abiertos*.

EJEMPLO 1.76. Si consideramos un espacio métrico (X, d) y $\mathcal{T}$ es el conjunto de lo que hemos llamado los conjuntos abiertos de X entonces $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

OBSERVACIÓN 1.77. Todo subconjunto de un espacio topológico también es un espacio topológico. Más precisamente:

Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si definimos

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap V : V \in \mathcal{T}_X\}$$

tenemos que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio topológico.

Es natural definir continuidad en espacios topológicos de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 1.78. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es *continua* si la imagen inversa bajo f de un abierto en Y es un abierto en X, es decir $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ para todo $V \in \mathcal{T}_Y$.

EJERCICIO 1.79. Dar un ejemplo de un conjunto Ω y una topología $\mathcal{T}$ en Ω tal que no existe ninguna métrica en Ω cuyos abierto sean los elementos de $\mathcal{T}$.

Ejercicios 1.

(1) Para $r \in [1, +\infty)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\| x \|_r = (|x_1|^r + \ldots + |x_n|^r)^{\frac{1}{r}} .$$

El objetivo del presente ejercicio es demostrar que $\| \; \|_r$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. La única de las propiedades de la norma que presenta alguna dificultad es la desigualdad triangular para el caso $r > 1$. Proceder de la siguiente manera:

(a) Demostrar que si α y β son números reales no negativos y $\lambda \in (0, 1)$ entonces

$$\alpha^\lambda \, \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \, \alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

(Sugerencia: considerar la función $\varphi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$ para $t \geq 0$, demostrar que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para todo $t \geq 0$ y considerar $t = \frac{\alpha}{\beta}$.

(b) Demostrar la desigualdad de Hölder:
Si $r, s \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \| x \|_r \, \| y \|_s .$$

(c) Demostrar la desigualdad de Minkowski:
Si $r \in (1, +\infty)$, , $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\| x + y \|_r \leq \| x \|_r + \| y \|_r .$$

(2) Demostrar que en un espacio métrico una sucesión no puede tener dos límites diferentes.

Nota: esta propiedad se conoce como unicidad del límite.

(3) Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

(a) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ para todo $x, y \in X$.

(b) $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Probar que d es una métrica en X.

(4) Representar gráficamente $B(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ con las métricas d_∞, d_1 y d_2.

(5) Sea X cualquier conjunto, definamos

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Demuestre que (X, d) es un espacio métrico.

(6) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que si $x_0 \in X$ y $r > 0$ entonces $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

(7) Sea A un conjunto abierto y sea $x \in A$. Pruebe que $A - \{x\}$ es abierto.

(8) ¿ Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos? '¿ Cuáles son cerrados? Hallar su interior, sus puntos límites y su clausura.

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Q}$
(d) $(0,1)$ (e) $[0,1]$ (f) $(0,1]$
(g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$ (h) $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$ (i) $(-\infty,1) \cup (3,4) \cup (4,5]$
(j) $\{1,3,5\} \cup (1,2)$

(9) ¿ Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos? ¿ Cuáles son cerrados? Hallar su interior, sus puntos límites y su clausura.

(a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(c) $(0,1) \times (0,1)$ (d) $(0,1) \times [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0\}$
(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ x \in (0,1)\}$

(10) Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que:
(a) La unión de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(b) La intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(c) La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(11) Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que la intersección de una familia infinita de conjuntos abiertos no sea un conjunto abierto.

(12) Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que:

(a) La intersección de una familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(b) La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(c) La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(13) Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados no sea un conjunto cerrado.

(14) Demostrar que todo subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}$ es una unión contable de intervalos abiertos disjuntos.

(15) Sea (X, d) un espacio métrico y sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones en X tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$. Probar que $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

(16) Sea (X, d) un espacio métrico. Definamos

$$D(x, y) = \frac{\mathrm{d}(x, y)}{1 + \mathrm{d}(x, y)}.$$

Demostrar que (X, D) también es un espacio métrico.

(17) Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es completo.

(18) Sean X e Y espacios métricos, sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo $C \subset Y$ cerrado.

(19) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x + y) = f(x) + f(y)$ entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ayuda: Pruebe primero que $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, hágalo primero para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y finalmente para $x \in \mathbb{Q}$.

(20) Sea X un conjunto no vacío y d la métrica dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

(a) ¿ Cuándo una sucesión en X es de Cauchy ?
(b) ¿ Cuándo una sucesión en X es convergente ?
(c) ¿ Es X completo ?

(d) Caracterizar los subconjuntos abiertos de X.
(e) Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, ¿ cómo es $B(x_0, r)$?
(f) Caracterizar las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son continuas.

(21) En cada uno de los siguientes ejercicios sea S el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen las condiciones dadas. Hacer un dibujo mostrando el conjunto S. Decir si S es abierto o si es cerrado y hallar su frontera. Indicar la frontera en el dibujo.
(a) $x^2 + y^2 < 1$.
(b) $3x^2 + 2y^2 < 6$.
(c) $|x| < 1$, $|y| < 1$.
(d) $x \geq 0$, $y > 0$.
(e) $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.
(f) $x > 0$, $y < 0$.
(g) $xy < 1$.
(h) $1 \leq x \leq 2$, $3 < y < 4$.
(i) $1 < x < 2$, $3 < y < 4$.
(j) $x \geq y$.
(k) $y > x^2$, $|x| < 2$.
(l) $(x^2 + y^2 - 4)(4 - x^2 - y^2) \geq 0$.
(m) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) \geq 0$.
(n) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$.
(o) $1 < x^2 + y^2 < 2$.
(p) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.
(q) $1 \leq x^2 + y^2 < 2$.
(r) $y = x^2$.

(22) En cada uno de los siguientes ejercicios, sea S el conjunto de los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las condiciones dadas. Determinar si S es abierto o no, si es cerrado o no y hallar su frontera.
(a) $z - x^2 - y^2 - 1 > 0$.
(b) $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.
(c) $x + y + z < 1$.
(d) $x + y + z < 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
(e) $x^2 + y^2 < 1$.

(f) $x^2 + y^2 \leq 1$.
(g) $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$.
(h) $x^2 + z^2 < 3$.
(i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} < 1$.

(23) Representar gráficamente la región del plano cuyas coordenadas polares satisfacen:
(a) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $1 \leq r \leq 2$.
(b) $r \leq 1$, $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$.
(c) $r \operatorname{sen} \theta \leq 1$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.
(d) $r \leq 4 \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(24) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que A es acotado si y sólo si el diámetro de A es finito.

(25) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar:
(a) $\operatorname{int}(A) \subset A$.
(b) $\operatorname{int}(A)$ es abierto.
(c) Si B es un abierto y $B \subset A$ entonces $B \subset \operatorname{int}(A)$.
Esto se expresa diciendo que $\operatorname{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.

(26) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar:
(a) $A \subset \overline{A}$.
(b) $\overline{A}$ es cerrado.
(c) Si C es un cerrado y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$.
Esto se expresa diciendo que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

(27) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

(28) *Demostrar que $(C[a, b], d_1)$ y $(C[a, b], d_2)$ no son completos.

CAPÍTULO 2

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

1. Conceptos Básicos.

En este capítulo y los siguientes nos dedicaremos a extender algunos de los conceptos y resultados del cálculo diferencial e integral en una variable a funciones $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, donde n y m son enteros mayores o iguales que 1.

Consideraremos funciones f definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y que toman valores en $\mathbb{R}^m$. El conjunto D se llama el *dominio* de la función f y lo denotaremos mediante $\text{Dom}(f)$.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función.

(a) Si $n = m = 1$ la función f se llama *función real de una variable real.*
(b) Si $n = 1$ y $m > 1$ a f se le llama *función vectorial de una variable real.*
(c) Si $n > 1$ y $m = 1$ la función f se llama *función real de una variable vectorial o campo escalar.*
(d) Si $n > 1$ y $m > 1$ la función f se llama *función vectorial de una variable vectorial o campo vectorial.*

EJEMPLO 2.2.

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\vec{x}) = c$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (función constante).
(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) El área de un rectángulo de lados x e y es la función de (x, y) dada por $f(x, y) = x.y$.
(d) El volumen de una caja de medidas x, y, z es la función de (x, y, z) dada por $f(x, y, z) = xyz$.
(e) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 4y, 3y + 5z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(f) La expresión $\int_x^y f(t)dt$ depende de x y de y, por lo tanto define una función de (x, y), dada por

$$g(x, y) = \int_x^y f(t)dt.$$

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. A partir de la fórmula que las definen indicaremos cuál es el dominio más grande en el que pueden ser consideradas.

Ejemplo 2.3.

(a) La fórmula

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

(b) La fórmula

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

(c) La fórmula

$$f(x, y) = \frac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$.

(d) La fórmula

$$f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 25\}$.

El *rango o imagen* de f es el conjunto de todos los vectores $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\vec{y} = f(\vec{x})$ para algún $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\text{Rango}(f) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0\}.$$

Definición 2.5. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})),$$

donde $f_1, \ldots, f_m$ son funciones escalares.

Las funciones $f_1, \ldots, f_m$ se llaman *funciones coordenadas* de f.

Es usual usar la notación abreviada $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Ejemplo 2.6.

(a) Sea

$$f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz).$$

Las funciones coordenadas de f son las tres funciones reales o escalares dadas por:

$$f_1(x, y, z) = x + y + z,$$
$$f_2(x, y, z) = xy + yz + zx,$$
$$f_3(x, y, z) = xyz.$$

(b) Sea

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2, 45).$$

Las funciones coordenadas de f son las dos funciones reales o escalares dadas por:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$
$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = 45.$$

Definición 2.7. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. El *gráfico* de f es el conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \vec{x} \in D, \vec{y} = f(\vec{x})\}.$$

Observemos que

$$\text{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}.$$

En el caso $n = 2$ y $m = 1$, es decir cuando tenemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces $\text{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^3$. En este caso el gráfico de f es la superficie

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \text{Dom} f,\ z = f(x, y)\},$$

que puede ser visualizada en casos particulares.

Ejemplo 2.8.

(a) Sea $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Veamos que su gráfico es la parte de arriba de una esfera de radio 1.

El domino de f es el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$. Si consideramos $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ para $x^2+y^2\leq 1$ entonces $z\geq 0$ y $x^2+y^2+z^2=1$.

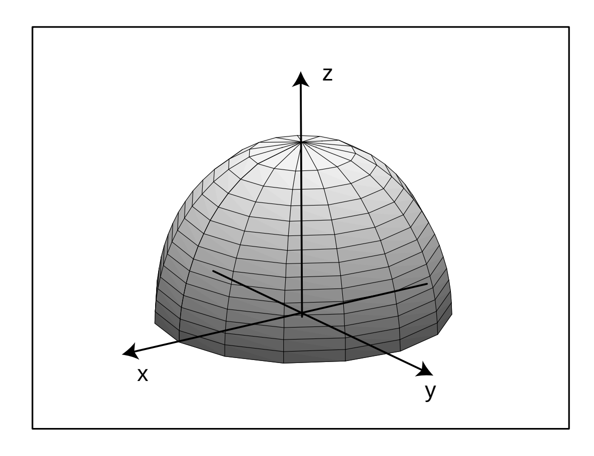


Figura 2.1. gráfico de $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

(b) Sea $f(x,y)=x^2+y^2$. El gráfico de f es un paraboloide de revolución, obtenido al rotar $z=y^2$ alrededor del eje z (justifique).

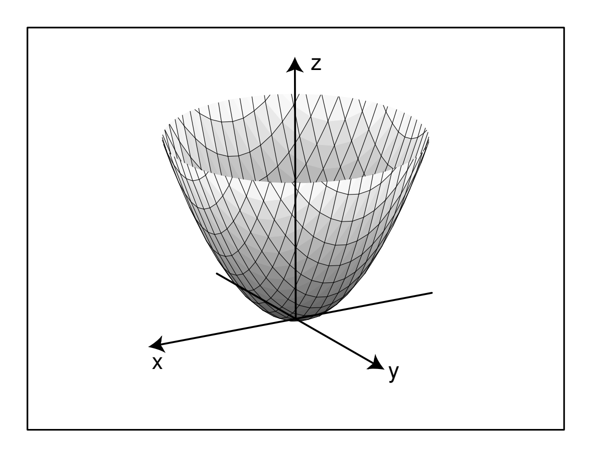


Figura 2.2. gráfico de $f(x,y)=x^2+y^2$

Si una función tiene dominio contenido en $\mathbb{R}^3$, no podemos representarla gráficamente.

Existe otro método útil para representar geométricamente una función de dos variables. Esto es un método semejante al de representar un paisaje tridimensional por un mapa topográfico bidimensional.

Los llamados conjuntos de nivel de una función nos dan una idea de su comportamiento.

Definición 2.9. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El *conjunto de nivel* de f, correspondiente al valor c es:

$$L_c = \{\vec{x} \in D : f(\vec{x}) = c\}.$$

Cuando $n = 2$ estos conjuntos se llaman *curvas de nivel* y son de la forma

$$\gamma_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}.$$

Cuando $n = 3$ estos conjuntos se llaman *superficies de nivel* y son de la forma

$$S_c = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}.$$

Ejemplo 2.10.

(a) Sea $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Sea $c \geq 0$. Tenemos que $f(x, y) = c$ si y sólo si $x^2 + y^2 = 1 - c^2$.

Por lo tanto, debe ser $0 \leq c \leq 1$. La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $1 - c^2$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

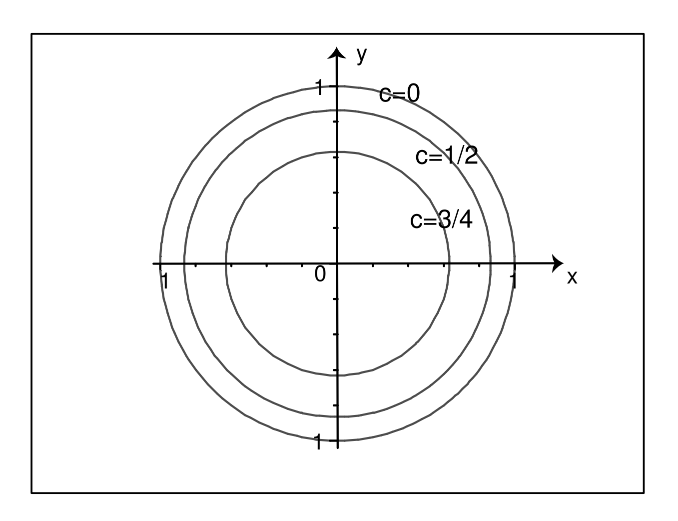


Figura 2.3. curvas de nivel de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(b) Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces las superficies de nivel son esferas (justifique).

(c) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel de f son circunferencias con centro en el origen.

Tenemos que si $f(x, y) = c$ si y sólo si $c \geq 0$ y $x^2 + y^2 = c$.

Por lo tanto, debe ser $c \geq 0$. La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

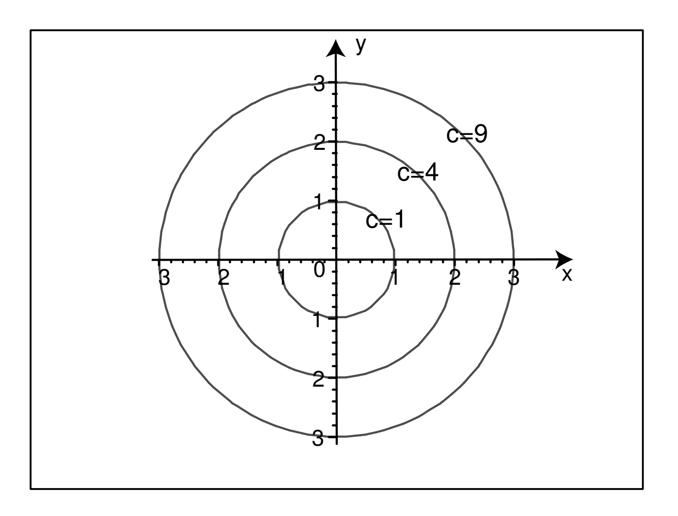
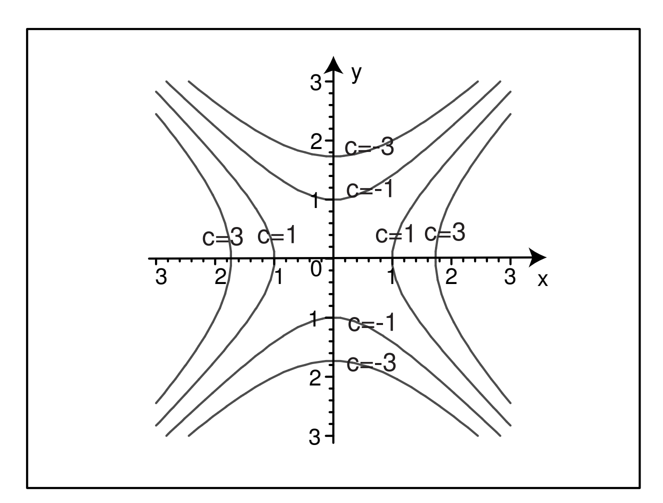


Figura 2.4. curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

(d) Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$ entonces las curvas de nivel de f son los conjuntos en los que $x^2 - y^2 = c$. Estos conjuntos nos dan una idea de como es el gráfico de f.



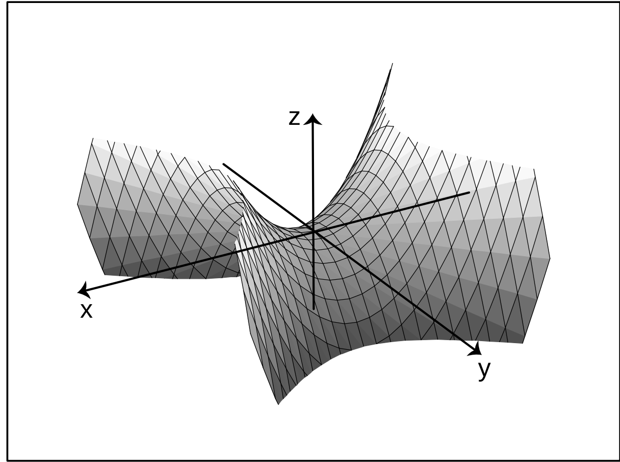


Figura 2.5. curvas de nivel y gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Esta superficie se conoce con el nombre de paraboloide hiperbólico o "silla de montar".

2. Límites.

La definición de límite está basada en la noción de proximidad y ya hemos visto que la nociones de límite y continuidad pueden ser extendidas a funciones entre dos espacios métricos.

Sabemos que $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana d_2 es un espacio métrico, donde

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_2,$$

es decir,

$$d_2((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Salvo que se indique expresamente lo contrario consideraremos la norma euclidiana $\| \, \|_2$ en $\mathbb{R}^n$ y la denotaremos simplemente con $\| \, \|$.

Por lo tanto, para el caso de las funciones $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, podemos considerar los conceptos de límite y continuidad vistos anteriormente.

Ejemplo 2.11. Sea

$$L = \lim_{(x,y) \to (1,2)} 2x + 5y.$$

Probaremos, a partir de la definición, que $L = 12$.

Sabemos que $\lim_{x \to 1} 2x = 2$ y $\lim_{y \to 2} 5y = 10$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - 1| < \delta_1$ entonces $|2x - 2| < \varepsilon/2$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|y - 2| < \delta_2$ entonces $|5y - 10| < \varepsilon/2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea (x, y) tal que

$$0 < \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta,$$

entonces

$$|x - 1| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \|(x - 1, y - 2)\| = \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta,$$

$$|y - 2| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \|(x - 1, y - 2)\| = \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta.$$

Luego

$$|2x + 5y - 12| = |2x + 5y - (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2)| = |2x - 2 + 5y - 10| \leq |2x - 2| + |5y - 10| < \varepsilon.$$

Proposición 2.12. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{a}$ un punto de acumulación de D. Supongamos que $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ y $\vec{L} = (L_1, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$

(b) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_k(\vec{x}) = L_k$ *para* $k = 1, \dots, m$.

La demostración queda como ejercicio.

Sugerencia: Si $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ entonces

(i) $|y_k| \leq \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_m^2} = \|\vec{y}\|$ para $k = 1, \dots, m$.

(ii) $\|\vec{y}\| \leq \|(y_1, 0, \dots, 0)\| + \ldots \|(0, \dots, 0, y_m)\| = |y_1| + \ldots + |y_m|$.

Ejemplo 2.13. Sea $f(t) = (t, t^2, \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))$. No existe $\lim_{t\to 0} f(t)$, ya que $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{t})$ no existe.

Lema 2.14. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{a}$ un punto de acumulación de D. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ existe entonces existe un entorno V de $\vec{a}$ tal que f es acotada en $V \cap D$.*

Demostración. Sea $\vec{L} = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$. Considerando $\varepsilon = 1$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ entonces

$$\|f(\vec{x}) - \vec{L}\| < 1.$$

Como

$$\|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| \leq |\, \|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|\, | \leq \|f(\vec{x}) - \vec{L}\|,$$

tenemos que

$$\|f(\vec{x})\| < \|\vec{L}\| + 1$$

para $\vec{x} \in D \cap B(\vec{a}, \delta)$ y $\vec{x} \neq \vec{a}$. □

Lema 2.15. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{a}$ un punto de acumulación de D. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \neq \vec{0}$ entonces existen $m > 0$ y un entorno V de $\vec{a}$ tales que $\|f(\vec{x})\| \geq m$ para todo $\vec{x} \in (V \setminus \{\vec{a}\}) \cap D$.*

Demostración. Considerando $\varepsilon = \|\vec{L}\|/2$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ entonces

$$\|f(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

Sea $V = B(\vec{a}, \delta)$, supongamos que $\vec{x} \in (V \setminus \{\vec{a}\}) \cap D$ entonces

$$|\|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|| \leq \|f(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

por lo tanto

$$-\frac{\|\vec{L}\|}{2} < \|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

de donde

$$\|f(\vec{x})\| > \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

□

Las propiedades del límite, ya conocidas para funciones reales de variable real se extienden de manera natural a los campos escalares, más precisamente:

TEOREMA 2.16 (Propiedades del límite para campos escalares).
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

(a) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

(b) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$.

(c) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}))$.

(d) *Si* $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}\right) = \frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})} .$$

La demostración se deja como ejercicio.

PROPOSICIÓN 2.17 (Límite a lo largo de una curva). *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D, I un intervalo abierto y $g : I \to D$ tales que:*

(a) *existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = \vec{a}$,*
(b) *$g(t) \neq \vec{a}$ si $t \neq t_o$,*
(c) *g es continua.*

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ *entonces*

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}).$$

Es decir: Si $\vec{x}$ se acerca al punto $\vec{a}$ a lo largo de g entonces $f(\vec{x})$ se tiene que acercar a $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

Hacer la demostración como ejercicio.

Tal como muestran los siguientes ejemplos, esta proposición es muy útil para demostrar que un límite no existe.

EJEMPLO 2.18.

(a) Supongamos que queremos averiguar si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ponemos $y = mx$ para

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Entonces tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}.$$

Pero esta expresión varía con m, así que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe.

(b) Estudiemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

A lo largo de la recta $y = mx$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Claramente el límite depende de la recta, por lo tanto no existe el límite.

Si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ el producto interno usual es:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

En el Capítulo anterior establecimos el siguiente resultado (Desigualdad de Cauchy-Schwarz):

(1) Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ entonces $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$. Es decir, si $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ son números reales arbitrarios entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

(2) Si algún $a_i \neq 0$ entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

si y sólo si existe $x_o \in \mathbb{R}$ tal que $a_k x_o + b_k = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

Teorema 2.19 (Continuidad de la norma). *Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \|\vec{x}\| = \|\vec{a}\|.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon$. Si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ entonces

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{a}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \|\vec{x}\| = \|\vec{a}\|.$$

□

Teorema 2.20 (Continuidad del producto interno). *Sean $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle.$$

Demostración. Si $\|\vec{v}\| = 0$ entonces $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos $\|\vec{v}\| \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon / \|\vec{v}\|$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle| = |\langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{x} - \vec{a}\|\|\vec{v}\| < \delta\|\vec{v}\| = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle.$$

□

Teorema 2.21 (Propiedades del límite para campos vectoriales). *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{a}$ un punto límite de D. Sean $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ funciones tales que*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} g(\vec{x})$$

existen y cada una de sus coordenadas es finita. Entonces

(a) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

(b) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$.

(c) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), \vec{v}\rangle = \langle \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}), \vec{v}\rangle$.

(d) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle = \langle \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}), \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})\rangle$.

Demostración. Las demostraciones de (a), (b) y (c) quedan como ejercicio. Haremos la demostración de (d).

Sean

$$\vec{L}_1 = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad \vec{L}_2 = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}).$$

Entonces

$$\langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle = \langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle - \langle f(\vec{x}), \vec{L}_2\rangle - \langle \vec{L}_1, g(\vec{x})\rangle + \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle.$$

Luego

$$\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle = \langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{L}_2\rangle + \langle \vec{L}_1, g(\vec{x})\rangle - \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle.$$

De donde

$$\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle - \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle = \langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle + \langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle + \langle \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle.$$

Usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle - \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle| \\ &\leq |\langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle| + |\langle f(\vec{x}) - \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle| + |\langle \vec{L}_1, g(\vec{x}) - \vec{L}_2\rangle| \\ &\leq \|f(\vec{x}) - \vec{L}_1\|\|g(\vec{x}) - \vec{L}_2\| + \|f(\vec{x}) - \vec{L}_1\|\|\vec{L}_2\| + \|\vec{L}_1\|\|g(\vec{x}) - \vec{L}_2\| \end{aligned}$$

Cada término de la derecha tiende a 0 cuando $\vec{x} \to \vec{a}$.

Por lo tanto

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle - \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle = 0.$$

De donde

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), g(\vec{x})\rangle = \langle \vec{L}_1, \vec{L}_2\rangle.$$

□

2.1. Límites iterados.

Los *límites iterados* son:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)), \qquad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

EJEMPLO 2.22. Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1,$$
$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1.$$

Así que

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -1.$$

Como ejercicio demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.23. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que existe un entorno de (a,b) contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

si existen los siguientes límites unidimensionales

$$\lim_{x\to a} f(x,y) \qquad y \qquad \lim_{y\to b} f(x,y)$$

entonces

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = L.$$

El Teorema 2.23 puede ser útil para demostrar que ciertos límites en $\mathbb{R}^2$ no existen, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.24. Consideremos nuevamente la función

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0,$$

ya estudiada en el ejemplo previo.

Se observa que los límites iterados son diferentes, el teorema anterior nos permite asegurar que $f(x,y)$ no tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

Observación 2.25. Las hipótesis del Teorema anterior pueden ser debilitadas, no hace falta que toda una bola abierta con centro en (a, b), a la que se le quita el centro, esté contenida en el domino D de la función. Verificar, como ejercicio, que esta hipótesis puede ser substituida por la siguiente:

Para y cercano a b, el punto a debe ser punto límite del domino de la función de x dada por $x \mapsto f(x, y)$.

Para x cercano a a, el punto b debe ser punto límite del domino de la función de y dada por $y \mapsto f(x, y)$.

El recíproco del Teorema 2.23 no es cierto. Puede ocurrir que los límites iterados existan y sean iguales, y que no exista el límite en $\mathbb{R}^2$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.26. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Usando límite a lo largo de una curva ya probamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no existe.

Sin embargo

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0.$$

También

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y)) = 0.$$

Luego los límites iterados existen y son iguales.

3. Continuidad.

Tal como ya hemos observado, la noción de continuidad en $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea es un caso particular del concepto de continuidad en espacios métricos.

Proposición 2.27. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{a} \in D$. Supongamos que $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *f es continua en $\vec{a}$*

(a) *f_k es continua en $\vec{a}$ para $k = 1, \dots, m$.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Ejemplo 2.28.

(a) Sea $f(t) = (t, t^2, \operatorname{sen} t)$. Entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Sea $f(t) = (t, t^2, \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))$. Entonces f es continua en todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observación 2.29. Una función de dos variables puede ser continua en cada variable separadamente y, sin embargo, no ser continua como función de dos variables, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.30. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tenemos que para un y fijo

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0+y^2} = 0 = f(0,y)$$

así que f es continua en la primera variable.

Tenemos que para un x fijo

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2+0} = 0 = f(x,0)$$

así que f es continua en la segunda variable.

Sin embargo, tal como ya lo probamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. Así que f no es continua en $(0,0)$ (como función de dos variables).

Las propiedades ya conocidas de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se extienden de manera natural a las funciones de varias variables. Como ejercicio demostrar los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 2.31.

(a) *La suma de funciones continuas es una función continua.*
(b) *El producto escalar de funciones continuas es una función continua.*
(c) *El cociente de una función continua entre un campo escalar continuo que no se anula es una función continua.*

PROPOSICIÓN 2.32. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^k$ son continuas y $f(A) \subset B$ entonces la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ es una función continua.*

EJEMPLO 2.33. Las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(x, y) = (x + y)^2$.
(b) $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x + y) + xy \cos y$.
(c) $f(x, y) = e^{x+y^2+z^3}$.

COROLARIO 2.34. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ es continua entonces la función $g : D \to \mathbb{R}$ definida por $g(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|$ es continua.*

4. Funciones continuas en conjuntos compactos.

TEOREMA 2.35. *Sea D un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función continua.*
Entonces $f(D)$, la imagen de D por f, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$.

DEMOSTRACIÓN. Se debe probar que $f(D)$ es cerrado y acotado.

(i) $f(D)$ es acotado:

Supongamos que $f(D)$ no es acotado. Entonces existe una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ contenida en D tal que $\|f(\vec{x}_k)\| \geq k$.

Como D es compacto la sucesión $\{\vec{x}_k\}$ contiene una subsucesión $\{\vec{x}_{k_j}\}$ que converge a $\vec{x}_0 \in D$.

Como f es continua se tendrá

$$\|f(\vec{x}_0)\| = \|\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{k_j})\| = +\infty.$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(D)$ es acotado.

(ii) $f(D)$ es cerrado:

Sea $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}$ un punto límite de $f(D)$.

Se debe probar que $\vec{y}_0 \in f(D)$, es decir que existe $\vec{x}_0 \in D$ tal que $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$.

Como $\vec{y}_0$ es un punto límite de $f(D)$, existe una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ contenida en D tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = \vec{y}_0.$$

Como D es compacto la sucesión $\{\vec{x}_k\}$ contiene una subsucesión $\{\vec{x}_{k_j}\}$ que converge a $\vec{x}_0 \in D$.

Por continuidad

$$f(\vec{x}_0) = \lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{k_j}) = \vec{y}_0.$$

□

Teorema 2.36. *Sea D un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función continua.*

Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Sea D un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función continua.

Supongamos que f no es uniformemente continua en D.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en D tales que $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ y $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \geq \varepsilon$.

Tomando $\delta = 1/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ se construyen un par de sucesiones $\{\vec{x}_k\}$, $\{\vec{y}_k\}$ contenidas en D tales que

$$\|\vec{x}_k - \vec{y}_k\| < \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad \|f(\vec{x}_k) - f(\vec{y}_k)\| \geq \varepsilon.$$

Como D es compacto $\{\vec{x}_k\}$ contiene una subsucesión $\{\vec{x}_{k_j}\}$ que converge a un punto $\vec{x}_0 \in D$, es decir,

$$\vec{x}_0 = \lim_{j\to\infty} \vec{x}_{k_j}.$$

Entonces es claro que

$$\lim_{j\to\infty} \vec{y}_{k_j} = \vec{x}_0.$$

Por la continuidad de f se debe tener

$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{k_j}) - f(\vec{y}_{k_j}) = \vec{0}.$$

Esto último contradice el hecho de que $\|f(\vec{x}_k) - f(\vec{y}_k)\| \geq \varepsilon$ para todo k.

Luego f debe ser uniformemente continua.

□

5. Transformaciones lineales y matrices.

Recordemos algunos resultados conocidos de álgebra lineal.

Existe una correspondencia natural entre las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y las matrices $m \times n$.

Para estudiar esta correspondencia resulta más conveniente representar a los elementos de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{R}^m$ como vectores columna. El operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está en correspondencia con la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ cuando se cumple la siguiente relación:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

es decir,

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Observación 2.37. La correspondencia entre transformaciones lineales y matrices depende de las bases que escojamos en los espacios. La correspondencia que hemos descrito corresponde con las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ (e_j es el vector con todas las coordenadas nulas, salvo la j-ésima que es 1).

Notar que la j-ésima columna de la matriz asociada a la transformación lineal T es el vector columna $T(e_j)$.

Definición 2.38. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ es una matriz $m \times n$ se define la norma de A por

$$\|A\|_M = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

Ejercicio 2.39. Demostrar que $\|.\|_M$ define una norma en $\mathbb{R}^{m\times n}$.

En general, para denotar norma de matrices se usará el subíndice M.

PROPOSICIÓN 2.40. *Si* $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ *es una matriz* $n \times n$ *entonces*

$$\|A\|_M \le n \ \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \dots, n\}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\|A\|_M \le \left(n^2 \max\{|a_{ij}|^2 : i, j = 1, \dots, n\}\right)^{1/2} \le n \ \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \dots, n\}$$

□

PROPOSICIÓN 2.41. *Sea* $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ *una matriz* $m \times n$ *y sea* $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *la transformación lineal asociada a la matriz* A*. Entonces*

$$\|T_A(\vec{x})\| \le \|A\|_M \|\vec{x}\|.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\|T_A(\vec{x})\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right) \|\vec{x}\|^2 \\
&= (\|A\|_M)^2 \|\vec{x}\|^2.
\end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.42. *Toda transformación lineal es uniformemente continua.*

Notemos que $(\mathbb{R}^{m\times n}, \| \ \|_M)$ es un espacio normado. Los siguientes resultados los necesitaremos más adelante.

PROPOSICIÓN 2.43.

(a) *La función determinante* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *es continua.*

(b) *Sean*

$$\Omega = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es invertible}\},$$

y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *la función dada por*

$$\varphi(A) = A^{-1}.$$

Entonces φ *es continua.*

Idea de la demostración.

Para la parte (a) basta notar que la función determinante es un polinomio en varias variables.

La parte (b) sigue de (a) y de la fórmula

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A,$$

donde $\operatorname{adj} A$ es la transpuesta de la matriz de los cofactores de A. $\square$

Ejercicios 2.

(1) Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \dfrac{e^{3x} - e^y}{e^x - e^y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x + y)}$

(e) $f(x,y,z) = \log(x + y - z)$

(f) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^2 + y^2 - 4}$

(g) $f(x,y,z) = \dfrac{xy + z}{\sqrt{1 - y}}$

(h) $f(x,y,z) = \arccos(x + y + z)$.

(2) Hallar y representar gráficamente el dominio, las curvas de nivel, el gráfico y la imagen de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(c) $f(x,y) = x + 2y$

(d) $f(x,y) = xy$.

(3) Decidir si existen los siguientes límites y en caso afirmativo calcularlo.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}.$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}.$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2xy + 5y^2}{3x^2 + 4y^2}.$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}.$

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{x^2+y^2}$.

(4) Usando la definición demostrar:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\tan(xy)}{x} = 3$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1}{2}$.

(5) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| = x^2, \\ x^2/|y| & \text{si } |y| > x^2, \\ |y|/x^2 & \text{si } |y| < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

(6) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$.

(7) Probar que las siguientes funciones tienden a 0 si (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta, pero ni f ni g tienen límite en el origen.

(a) $g(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$

(b) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

Ayuda: considere parábolas que pasan por el origen.

(8) Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

no existe.

(9) Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y\neq 0;\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

Demuestre que $f(x,y)$ tiende a 0 si (x,y) tiende a $(0,0)$. ¿Qué puede decir de los límites iterados?

(10) Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ si $x^2y^2+(x-y)^2\neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y),$$

pero que $f(x,y)$ no tiene límite en el origen.

Ayuda: para $y=x$, f tiende a 1.

(11) Diga dónde son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x,y)=\mathrm{sen}\,(x^2y)$

(b) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

(c) $f(x,y)=\dfrac{e^{x+y}}{x+y}$

(d) $f(x,y)=\log(\cos(x^2+y^2))$

(e) $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\cos y^2$

(f) $f(x,y)=\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

(g) $f(x,y)=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$

(12) Demostrar que la siguiente función no es continua en (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(13) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) En (0,0),

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

(b) En los puntos de la recta x = y,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ x + y & \text{si } x = y \end{cases}$$

(c) En (1, 1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y - 2)}{x + y - 2} & \text{si } x + y \neq 2 \\ 1 & \text{si } x + y = 2 \end{cases}$$

(14) ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

(a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$

(c) $f(x,y) = x^2 \log(x^2 + y^2)$

(15) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x,y)$ tiende a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.
(b) Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual f tome valor constante igual a 1.
(c) ¿ Es f continua en el origen ?.

(16) Diga si se puede definir f en $(0,0)$ de manera tal que f sea continua.

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

(17) Demuestre el siguiente Teorema:

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x})$ existe y cada una de sus coordenadas es finita. .

(b) Para cada sucesión $\{\vec{x}_n\}$ tal que $\vec{x}_n \in D$, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ se tiene que la sucesión $\{f(\vec{x}_n)\}$ converge.

Más aún, si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = \vec{L}$ para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}$ tal que $\vec{x}_n \in D$, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$.

(18) Considere la función $f(x, y) = (x, y^2, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))$.

(a) Determine el dominio más grande en el puede definirse.

(b) Demuestre que no tiene límite cuando (x, y) tiende al punto $(0, b) \in \mathbb{R}^2$.

(19) Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y sea $V_a \subset \mathbb{R}$ un entorno de a.

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe y si $\lim_{y\to b} f(x, y)$ existe para cada $x \in V_a$ entonces

$$\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y).$$

(20) Demuestre que la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \qquad \text{si} \qquad x + y \neq 0$$

no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

(21) Demuestre la siguiente proposición (precisar las hipótesis faltantes):

Sean $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ y $\vec{L} = (L_1, \ldots, L_m)$.

$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_k(\vec{x}) = L_k$ para todo $k = 1, \ldots, m$.

(22) Demuestre la siguiente proposición:

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ funciones tales que $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$ existen y son finitos (en cada coordenada). Entonces

(a) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

(b) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$.

(c) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), \vec{v}\rangle = \langle \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}), \vec{v}\rangle$.

(23) Demuestre la siguiente proposición (precisar las hipótesis faltantes):

Sea $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$

f es continua en $\vec{a}$ si y sólo si f_k es continua en $\vec{a}$ para $k = 1, \ldots, m$.

(24) Demuestre la siguiente proposición:

Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son continuas entonces la función $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ es una función continua.

(25) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Supongamos que existen constantes positivas K y α tales que

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq K\|\vec{x} - \vec{y}\|^\alpha,$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

CAPÍTULO 3

Bases del cálculo diferencial en varias variables.

1. El diferencial.

Para motivar el concepto de diferenciabilidad para funciones de varias variables conviene recordar y revisar el concepto de derivada de una función real de variable real.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $x_o \in \mathbb{R}$. Recordemos que f es diferenciable en x_o si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Este límite se suele denotar por $f'(x_o)$ y se le llama la derivada de f en el punto x_o.

Vamos a reescribir el concepto de diferenciabilidad de la siguiente manera:

Supongamos que f diferenciable en x_o y sea $\lambda = f'(x_o)$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} - \lambda = 0,$$

es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - \lambda h}{h} = 0.$$

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(h) = \lambda h.$$

Entonces T es una transformación lineal y

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_o + h) - f(x_o) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$.

Decimos que f es *diferenciable* en $\vec{x}_o$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Proposición 3.2. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces existe una única transformación lineal T tal que*

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Demostración. Sean T_1 y T_2 dos transformaciones lineales tales que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T_j(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

para $j = 1, 2$.

Entonces

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|T_1(\vec{h}) - T_2(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Por lo tanto para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0} \frac{\|T_1(t\vec{v}) - T_2(t\vec{v})\|}{\|t\vec{v}\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|t|\|T_1(\vec{v}) - T_2(\vec{v})\|}{|t|\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\|T_1(\vec{v}) - T_2(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|}. \end{aligned}$$

De donde $\|T_1(\vec{v}) - T_2(\vec{v})\| = 0$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $T_1 = T_2$. □

Definición 3.3. Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, el *diferencial* de f en $\vec{x}_o$ es la única transformación lineal T tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

T se denotará por $df_{\vec{x}_o}$.

En resumen: si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, entonces existe una transformación lineal, que denotaremos por $df_{\vec{x}_o}$, tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Observación 3.4. En el caso $m = n = 1$ esto coincide con la definición usual de derivada. En efecto, en este caso la transformación lineal T es de la forma $T(h) = \lambda h$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, con λ fijo. Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_o+h) - f(x_o) - \lambda h|}{|h|} = 0.$$

De donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = \lambda.$$

Es muy importante notar que, en este caso, el diferencial de f en x_o es la función lineal definida por

$$T(h) = f'(x_o)h.$$

PROPOSICIÓN 3.5. *Si* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es una transformación lineal entonces* T *es diferenciable en todo punto* $\vec{x}_o \in \mathbb{R}^n$ *y*

$$dT_{\vec{x}_o} = T.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que, por la linealidad de T, tenemos que

$$T(\vec{x}_o + \vec{h}) - T(\vec{x}_o) - T(\vec{h}) = \vec{0}.$$

□

Como es usual, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denotará la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 3.6. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{x}_o \in D$.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a la j-ésima variable x_j en $\vec{x}_o$ se define por

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_o + te_j) - f(\vec{x}_o)}{t},$$

en caso de que el límite exista.

Esta derivada se calcula de la siguiente manera: se consideran todas las variables constantes salvo a la j-ésima variable y se deriva con respecto a ella usando las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 3.7. Sea $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} \operatorname{sen} x + e^{x+y} \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} \operatorname{sen} x.$$

La *derivada parcial del campo vectorial* f con respecto a x_j en $\vec{x}_o$ se define de manera completamente análoga. Por las propiedades del límite que ya hemos estudiado, tenemos que si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es un campo vectorial, entonces la derivada parcial de f con respecto a x_j en $\vec{x}_o$ existe si y sólo si existen las derivadas parciales de cada una de las funciones coordenadas y, en este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_o) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}_o), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{x}_o) \right).$$

Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y que $f : D \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en $\vec{x}_o \in D$. Entonces

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, si consideremos $\vec{h} = te_j$ con $t \to 0$, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(\vec{x}_o + te_j) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(te_j)\|}{\|te_j\|} = 0,$$

usando la linealidad de $df_{\vec{x}_o}$ y que $\|te_j\| = |t|$, obtenemos

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(\vec{x}_o + te_j) - f(\vec{x}_o) - t df_{\vec{x}_o}(e_j)}{t} \right\| = 0,$$

es decir

$$df_{\vec{x}_o}(e_j) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_o + te_j) - f(\vec{x}_o)}{t}.$$

Hemos establecido el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\vec{x}_o \in D$.*

Entonces, para $j = 1, \dots, n$, existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_o)$ y

$$df_{\vec{x}_o}(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_o).$$

Por la proposición anterior, si $f = (f_1, \dots, f_m)$, entonces

$$df_{\vec{x}_o}(e_j) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}_o), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{x}_o) \right),$$

por lo tanto, la j-ésima columna de la matriz de $df_{\vec{x}_o}(e_j)$ en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}_o) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{x}_o) \end{bmatrix}$$

Definición 3.9. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $\vec{x}_o \in D$. Sean $f_1, \dots, f_m$ las funciones coordenadas de f.

La *matriz jacobiana* o *jacobiano* de f en el punto $\vec{x}_o$ es

$$f'(\vec{x}_o) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_o) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_o) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_o) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_o) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_o) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_o) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \end{bmatrix}$$

siempre y cuando existan estas derivadas parciales.

De los comentarios anteriores sigue el siguiente resultado.

Proposición 3.10. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\vec{x}_o \in D$.*

La matriz de la transformación lineal $df_{\vec{x}_o}$ en la base canónica es la matriz jacobiana de f en el punto $\vec{x}_o$.

Observación 3.11. Si expresamos los vectores $df_{\vec{x}_o}(\vec{h})$ y $\vec{h}$ como vectores columna en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, tendremos que

$$df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) = f'(\vec{x}_o) \cdot \vec{h},$$

donde $\cdot$ denota el producto de matrices.

En el caso de un campo escalar la matriz jacobiana tiene una sola fila y se le conoce con el nombre de gradiente, más precisamente.

Definición 3.12. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{x}_o \in D$.

El *gradiente* de f en $\vec{x}_o$ es

$$\nabla f(\vec{x}_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_o), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_o) \right),$$

en caso de que las derivadas parciales existan.

Observación 3.13. Si f es un campo escalar entonces $f'(\vec{x}_o) = \nabla f(\vec{x}_o)$.

Observación 3.14. Si f es un campo vectorial y $f = (f_1, \dots, f_m)$ entonces tenemos que, para $i = 1, \dots, m$, $\nabla f_i(\vec{x}_o)$ es la i-ésima fila de $f'(\vec{x}_o)$.

Ejemplo 3.15.

(a) Si $f(x, y) = (x^2 y, e^{\operatorname{sen}(x-y)})$ entonces

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{\operatorname{sen}(x-y)} \cos(x-y) & -e^{\operatorname{sen}(x-y)} \cos(x-y) \end{bmatrix}$$

(b) Si $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ entonces

$$g'(t) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

(c) Si $h(x, y, z) = x^y + z$.

$$h'(x, y, z) = \nabla h(x, y, z) = (y x^{y-1}, x^y \ln x, 1)$$

Observación 3.16. Para $n = 1$ y $m = 3$ el vector

$$f'(x_o) = \begin{pmatrix} f_1'(x_o) \\ f_2'(x_o) \\ f_3'(x_o) \end{pmatrix}$$

tiene un significado geométrico: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ entonces la imagen de f es una curva y $f'(x_o)$ es un vector tangente a la curva en el punto $f(x_o)$. Justifique.

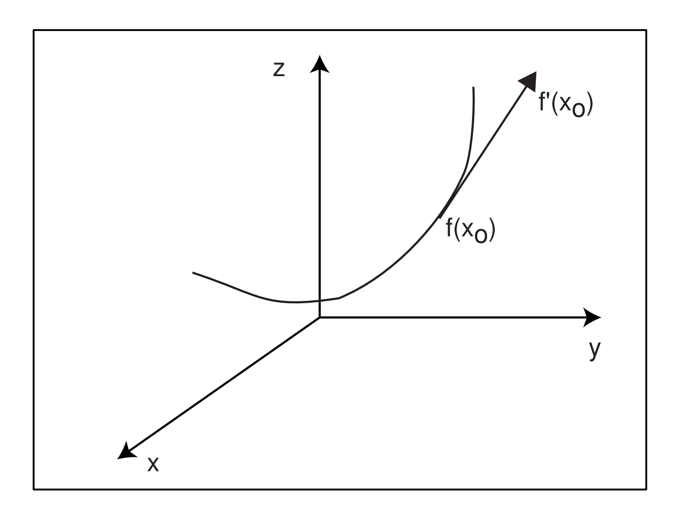


Figura 3.1.

Proposición 3.17. *Si f es un campo escalar entonces*

$$df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{h} \rangle.$$

Demostración. Supongamos $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_o), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_o) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_o) h_n \\ &= \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{h} \rangle. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.18. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces f es continua en $\vec{x}_o$.*

Demostración. Como toda transformación lineal es continua tenemos que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) = \vec{0}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o)\| &= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) + df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
&\leq \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \left[\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| + \|df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \right] \\
&= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
&= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \left[\|\vec{h}\| \left(\frac{\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \right] \\
&= \left(\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| \right) \left(\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_o+\vec{h}) = f(\vec{x}_o).$$

□

Lema 3.19. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función, con $f = (f_1, \ldots, f_m)$, y $\vec{x}_o \in D$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*
(b) *f_k es diferenciable en $\vec{x}_o$ para $k = 1, \ldots, m$.*

La demostración de este lema queda como ejercicio.

Definición 3.20. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$, se dice que f es *continuamente diferenciable* en $\vec{x}_o$ si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $\vec{x}_o$.

Teorema 3.21. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si f es continuamente diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*

Demostración. Por el Lema 3.19 basta considerar el caso de un campo escalar $f : D \to \mathbb{R}$.

Dados $\vec{x}_o = (x_1^{(o)}, \dots, x_n^{(o)})$ y $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ sean $\vec{h}^k = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{h}^o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{x}_o + \vec{h}^k) - f(\vec{x}_o + \vec{h}^{k-1}).$$

Sea k fijo (con $1 \leq k \leq n$). Por el teorema del valor medio de Lagrange existe $c_k = c_k(h_k) \in (x_k^{(o)}, x_k^{(o)} + h_k)$ tal que

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}_o + \vec{h}^k) - f(\vec{x}_o + \vec{h}^{k-1}) &= f(x_1^{(o)} + h_1, \dots, x_{k-1}^{(o)} + h_{k-1}, x_k^{(o)} + h_k, x_{k+1}^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}) \\
&\quad - f(x_1^{(o)} + h_1, \dots, x_{k-1}^{(o)} + h_{k-1}, x_k^{(o)}, x_{k+1}^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}) \\
&= h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^{(o)} + h_1, \dots, x_{k-1}^{(o)} + h_{k-1}, c_k, x_{k+1}^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}).
\end{aligned}$$

Sea

$$\vec{v}_k(\vec{h}) = (x_1^{(o)} + h_1, \dots, x_{k-1}^{(o)} + h_{k-1}, c_k, x_{k+1}^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}).$$

Entonces $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \vec{v}_k(\vec{h}) = \vec{x}_o$ y

$$f(\vec{x}_o + \vec{h}^k) - f(\vec{x}_o + \vec{h}^{k-1}) = h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v}_k(\vec{h})).$$

Por lo tanto

$$f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v}_k(\vec{h})).$$

Por la continuidad de las derivadas parciales sabemos que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v}_k(\vec{h})) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \vec{v}_k(\vec{h})\right) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_o).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{h} \rangle|}{\|\vec{h}\|} &= \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{1}{\|\vec{h}\|} \left| \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v^k}(\vec{h})) - \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_o) \right| \\
&\leq \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v}_k(\vec{h})) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_o) \right| \frac{|h_k|}{\|\vec{h}\|} \\
&\leq \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{v}_k(\vec{h})) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_o) \right| = 0.
\end{aligned}$$

Luego f es diferenciable en $\vec{x}_o$ y

$$df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{h} \rangle.$$

$\square$

DEFINICIÓN 3.22. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función, se dice que f es *de clase* $\mathcal{C}^1$ en D si sus derivadas parciales existen y son continuas en D.

COROLARIO 3.23. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$. Si f es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en D entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$ para todo $\vec{x}_o \in D$.*

EJERCICIO 3.24. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ funciones y $\vec{x}_o \in D$.

Demostrar que si f y g son diferenciables en $\vec{x}_o$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + g$ es diferenciable en $\vec{x}_o$ y

$$d(\alpha f + g)_{\vec{x}_o} = \alpha df_{\vec{x}_o} + dg_{\vec{x}_o}.$$

2. Derivadas de orden superior para funciones de dos variables.

Sea f una función de dos variables.

Las *derivadas parciales de primer orden* son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Las *derivadas parciales de segundo orden* son

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Así sucesivamente las *derivadas parciales de orden* N son de la forma

$$f_{a_1 a_2 a_3 \dots a_N}$$

donde a_i puede ser x o y. Vamos a ver que, bajo ciertas condiciones de regularidad, una derivada parcial de orden N es independiente del orden de derivación. Bajo estas condiciones de regularidad una derivada de orden N tiene la forma

$$f_{x\ y}^{k\ N-k} = \frac{\partial^N f}{\partial y^{N-k} \partial x^k} = \frac{\partial^{N-k}}{\partial y^{N-k}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right).$$

DEFINICIÓN 3.25. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *de clase* $\mathcal{C}^2$ cuando las derivadas parciales de primero y segundo orden de f existen y son continuas en D.

Más generalmente, si $D \subset \mathbb{R}^n$ y N es un entero positivo, f es *de clase* $\mathcal{C}^N$ en D cuando existen y son continuas las derivadas parciales de f en D hasta el orden N.

TEOREMA 3.26. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{x} = (x, y) \in D$. Como D es abierto existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset D$. Sea $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{h}\| < r$. Entonces $\vec{x} + \vec{h} \in B(\vec{x}, r) \subset D$.

Para $\|\vec{h}\| < r$ sea

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y)) - f(x, y + h_2) + f(x, y).$$

(a) Sea $G(t) = f(t, y + h_2) - f(t, y)$. Entonces $F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x)$.

Por el teorema del valor medio existe $c_1 = c_1(\vec{h}) \in (x, x + h_1)$ tal que

$$F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x) = h_1 G'(c_1) = h_1(f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y)).$$

De la misma manera, existe $c_2 = c_2(\vec{h}) \in (y, y + h_2)$ tal que

$$f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y) = h_2 f_{xy}(c_1, c_2).$$

Luego

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1, c_2) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

(b) Análogamente, invirtiendo el orden y usando que

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)) - f(x + h_1, y) + f(x, y)$$

se puede demostrar que

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

De lo hecho en (a) y (b) obtenemos:

$$f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})).$$

Haciendo $\vec{h} \to \vec{0}$ y usando la continuidad de f_{xy} y f_{yx} se obtiene

$$f_{xy}(\vec{x}) = f_{yx}(\vec{x}).$$

□

OBSERVACIÓN 3.27. El teorema anterior se extiende de manera natural a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y a derivadas de orden superior.

3. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano.

El gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano son campos que aparecen en muchos problemas de la física y de la matemática. En esta sección los definiremos, pero antes daremos una representación simbólica de cada uno de ellos. Para eso haremos las siguientes observaciones:

(a) Consideraremos campos definidos en subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ tales que existen las derivadas parciales.

(b) Interpretaremos a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ como un producto: "$\dfrac{\partial}{\partial x}$ por f".

(c) Manejaremos el símbolo ∇ (nabla) como si fuera un vector,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

El gradiente y su representación simbólica. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Sabemos que el gradiente de f es el campo vectorial dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Esta fórmula puede interpretarse como una multiplicación "formal" del vector simbólico ∇ por el campo escalar f.

La divergencia y su representación simbólica. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial dado por $f = (f_1, f_2, f_3)$. Si formamos el "producto escalar" $\langle \nabla, f\rangle$ de modo puramente formal, encontramos que

$$\langle \nabla, f\rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

DEFINICIÓN 3.28. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial dado por $f = (f_1, f_2, f_3)$. La *divergencia* de f es el campo escalar dado por

$$\operatorname{div} f = \langle \nabla, f\rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

El rotacional y su representación simbólica. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial dado por $f = (f_1, f_2, f_3)$. Si formamos el "producto vectorial" $\nabla \times f$ de modo puramente formal, encontramos que

$$\nabla \times f = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \right).$$

Este determinante de tercer orden está desarrollado por la primera fila.

Definición 3.29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial dado por $f = (f_1, f_2, f_3)$. El *rotacional* de f es el campo vectorial definido mediante la ecuación:

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \right).$$

El laplaciano y su representación simbólica. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Si formamos el "producto escalar" $\langle \nabla, \nabla f \rangle$ de modo puramente formal, encontramos que

$$\langle \nabla, \nabla f \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Definición 3.30. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. El operador lineal ∇^2 definido por la ecuación

$$\nabla^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

se llama *laplaciano tridimensional*.

En resumen, el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano pueden representarse simbólicamente por los productos ∇f, $\langle \nabla, f \rangle$, $\nabla \times f$ y $\langle \nabla, \nabla f \rangle$ respectivamente. Cada uno de estos campos tiene un significado y propiedades importantes, que serán estudiadas en lo sucesivo.

4. Funciones compuestas y la regla de la cadena.

La regla de la cadena permite calcular el diferencial de la composición de dos funciones.

Lema 3.31. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función. Supongamos que f es diferenciable en $\vec{x} \in D$. Entonces existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que*

$$\frac{\| f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) \|}{\| \vec{h} \|} \leq M$$

si $0 < \| \vec{h} \| < r$.

Demostración.

$$\frac{\|f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})\|}{\|\vec{h}\|} \leq \frac{\|f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-df_{\vec{x}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} + \frac{\|df_{\vec{x}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}$$

Como $df_{\vec{x}}$ es un transformación lineal existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|df_{\vec{x}}(\vec{h})\| \leq M_1\|\vec{h}\|,$$

para todo $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq \vec{0}$. Por lo tanto

$$\frac{\|df_{\vec{x}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}$$

está acotado si $\vec{h} \neq \vec{0}$ (ver Proposición 2.41).

Como f es diferenciable en $\vec{x}$ tenemos que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-df_{\vec{x}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{\|f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-df_{\vec{x}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}$$

es acotado para $\|\vec{h}\|$ no nula y pequeña.

Finalmente, de estas dos últimas acotaciones obtenemos el resultado deseado.

□

Teorema 3.32 (Regla de la cadena). *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos. Sean $f : D \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \to \mathbb{R}^k$ dos funciones y sea $\vec{x} \in D$. Supongamos que:*

(a) *f es diferenciable en $\vec{x}$,*

(b) *$f(\vec{x}) \in V$,*

(c) *g es diferenciable en $f(\vec{x})$.*

Entonces $g \circ f$ es diferenciable en $\vec{x}$ y se tiene

$$d(g \circ f)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_{\vec{x}}.$$

En términos de las matrices jacobianas el resultado queda así:

$$(g \circ f)'(\vec{x}) = g'(f(\vec{x})) \cdot f'(\vec{x}).$$

($\circ$ indica la composición de funciones y $\cdot$ indica el producto de matrices).

Demostración.

Sean $T_1 = df_{\vec{x}}$ y $T_2 = dg_{f(\vec{x})}$.

Para $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq \vec{0}$, sea

$$\varphi(\vec{h}) = \frac{f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - T_1(\vec{h})}{\|\vec{h}\|},$$

y para $\vec{k} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{k} \neq \vec{0}$ sea

$$\psi(\vec{k}) = \frac{g(f(\vec{x})+\vec{k}) - g(f(\vec{x})) - T_2(\vec{k})}{\|\vec{k}\|}.$$

Por la diferenciabilidad de f y g se tiene

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\varphi(\vec{h})\| = 0, \qquad \lim_{\vec{k}\to\vec{0}} \|\psi(\vec{k})\| = 0.$$

Por el Lema 3.31 existe $M > 0$ tal que

$$\frac{\|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\|}{\|\vec{h}\|} \leq M$$

para $\vec{h}$ no nulo en un entorno de $\vec{0}$.

Como T_2 es continua entonces

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} T_2\left(\varphi(\vec{h})\right) = T_2(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(\vec{x}+\vec{h}) - (g\circ f)(\vec{x}) - T_2\circ T_1(\vec{h}) \\
&= g\left(f(\vec{x}+\vec{h})\right) - g(f(\vec{x})) - T_2\left(f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\right) \\
&\quad + T_2\left(f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\right) - T_2\left(T_1(\vec{h})\right) \\
&= \left\|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\right\| \ \psi\left(f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\right) \\
&\quad + T_2\left(f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - T_1(\vec{h})\right) \\
&= \left\|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\right\| \ \psi\left(f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}\right) + \|\vec{h}\| T_2\left(\varphi(\vec{h})\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en un entorno de $\vec{0}$

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \frac{1}{\|\vec{h}\|}\left(\|(g \circ f)(\vec{x}+\vec{h})-(g \circ f)(\vec{x})-T_2 \circ T_1(\vec{h})\|\right) \\
\leq & \left(\frac{\|f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x}))\|}{\|\vec{h}\|}\right)\|\psi\left(f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})\right)\|+\|T_2(\varphi(\vec{h}))\| \\
\leq & M\ \|\psi\left(f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})\right)\|+\|T_2(\varphi(\vec{h}))\|.
\end{aligned}
$$

Como la última expresión de la derecha tiende a 0, resulta que

$$
\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{(g \circ f)(\vec{x}+\vec{o})-(g \circ f)(\vec{x})-dg_{f(\vec{x})} \circ df_{\vec{x}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}
$$

□

Observación 3.33. Dadas dos funciones diferenciables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ con $f=(f_1,\ldots,f_n)$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, por la regla de la cadena

$$
(g_o f)'(t_o)=\langle\nabla g(f(t_o)), f'(t_o))\rangle.
$$

Si $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ entonces

$$
(g\circ f)'(t_o)=\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_o))f_1'(t_o)+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t_o))f_n'(t_o).
$$

Si no indicamos dónde evaluamos obtenemos

$$
\frac{d(g\circ f)}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{df_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{df_n}{dt}.
$$

Si tomamos $x_1=x_1(t)=f_1(t)$, $\ldots$, $x_n=x_n(t)=f_n(t)$ y si tomamos $u=g\circ f=g(\vec{x})$ obtenemos

$$
\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.
$$

5. Plano Tangente.

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ puede estar dada como un conjunto de nivel, como el gráfico de un campo escalar en dos variables y también en forma paramétrica. Estudiaremos cómo son los planos tangentes a los dos primeros tipos de superficies, las superficies dadas en forma paramétrica serán estudiadas más adelante.

Plano tangente a una superficie dada como un conjunto de nivel.

DEFINICIÓN 3.34. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $(x_o, y_o, z_o) \in S$. Decimos que el vector $\vec{v}$ es ortogonal a S en (x_o, y_o, z_o) si para cada curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I) \subset S$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$ se tiene que $\vec{v}$ es ortogonal a $\alpha'(t_o)$.

PROPOSICIÓN 3.35. *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea S_c la superficie de nivel de F dada por*

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = c\}.$$

Si $(x_o, y_o, z_o) \in S_c$ y $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ entonces $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal a S_c en (x_o, y_o, z_o).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva tal que $\alpha(I) \subset S_c$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$. Entonces tenemos que $F \circ \alpha \equiv c$ y por lo tanto $(F \circ \alpha)'(t) = 0$.

De la regla de la cadena sigue que

$$(F \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle,$$

para todo $t \in I$. En particular

$$0 = \langle \nabla F(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = \langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), \alpha'(t_o) \rangle.$$

□

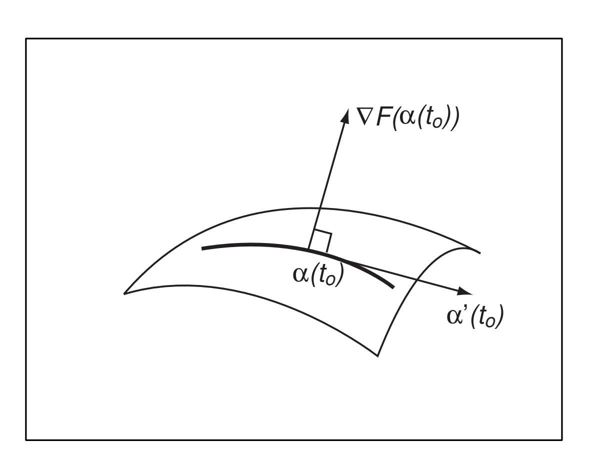


FIGURA 3.2.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea S_c una superficie de nivel de F. El *plano tangente a la superficie dada como un conjunto de nivel,* en el punto (x_o, y_o, z_o) es el plano de ecuación:

$$\langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \rangle = 0,$$

siempre que $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq \vec{0}$.

Observación 3.36. Más adelante, después de estudiar el teorema de la función implícita, quedará más claro la necesidad de la condición $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq \vec{0}$.

Plano tangente a una superficie dada como un gráfico. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, entonces el gráfico de f define una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Esta superficie coincide con la superficie de nivel para el valor 0, de la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = -z + f(x, y)$, es decir,

$$S_o = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z + f(x, y) = 0\}$$

es el gráfico de f.

La ecuación del plano tangente a S_o es:

$$0 = (x - x_o)\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) + (y - y_o)\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o).$$

Pero

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -1\right).$$

Usando que $z_o = f(x_o, y_o)$ obtenemos

$$z = f(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Esta última es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

6. Derivadas direccionales.

Definición 3.37. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma uno y $\vec{x}_o \in D$. La *derivada direccional del campo escalar* f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto $\vec{x}_o$ es

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_o + t\vec{v}) - f(\vec{x}_o)}{t}$$

siempre que el límite exista.

De la definición sigue que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ mide la variación de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto $\vec{x}_o$.

Si $\alpha(t) = \vec{x}_o + t\vec{v}$ entonces $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = (f \circ \alpha)'(0)$.

Observación 3.38. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Entonces

$$D_{\vec{e_j}} f(\vec{x}_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_o) \text{ si } 1 \leq j \leq n.$$

Definición 3.39. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma uno y $\vec{x}_o \in \mathbb{R}^n$. La *derivada direccional del campo vectorial* f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto $\vec{x}_o$ es

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = \begin{bmatrix} D_{\vec{v}} f_1(\vec{x}_o) \\ \vdots \\ D_{\vec{v}} f_m(\vec{x}_o) \end{bmatrix}$$

siempre que existan $D_{\vec{v}} f_k(\vec{x}_o)$ para $1 \le k \le m$.

Observación 3.40. La existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no implica la continuidad en ese punto (ver el siguiente ejemplo). Por esta razón, las derivadas direccionales no constituyen una extensión satisfactoria del concepto unidimensional de la derivada. La diferencial es la generalización más conveniente.

Ejemplo 3.41. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0 \\ 0 & \text{si x = y = 0} \end{cases}$$

Veamos que f no es continua en $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x}{1 + m^4x^2} = 0.$$

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto f no tiene límite en $(0,0)$.

Veamos todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$ existen.

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Si $v_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2v_1^2 + t^4 v_2^4} \right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1}. \end{aligned}$$

Si $v_1 = 0$

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Por lo tanto $D_{\vec{v}} f(0,0)$ existe en cualquier dirección $\vec{v}$.

OBSERVACIÓN 3.42. El ejemplo anterior muestra que la existencia de las derivadas parciales no implica diferenciabilidad.

Veamos cómo se puede calcular la derivada direccional de una función cualquiera.

TEOREMA 3.43. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función, si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma uno y*

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = df_{\vec{x}_o}(\vec{v}).$$

En particular, para $m = 1$ se tiene:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha(t) = \vec{x}_o + t\vec{v}$. Por la regla de la cadena:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = (f \circ \alpha)'(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = f'(\vec{x}_o) \cdot \vec{v} = df_{\vec{x}_o}(\vec{v})$$

donde $\cdot$ indica el producto de matrices y el vector $\alpha'(0) = \vec{v}$ es colocado convenientemente en forma matricial. □

7. Dirección de máximo crecimiento.

De la definición de derivada direccional sigue que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ es una medida del crecimiento de f en $\vec{x}_o$, en la dirección del vector $\vec{v}$.

Tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3.44. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_o$. Si $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o)$ es un vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{v}$ un vector de norma 1. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)| = |\langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle| \leq \|\nabla f(\vec{x}_o)\| \|\vec{v}\| = \|\nabla f(\vec{x}_o)\|.$$

Además la igualdad ocurre si y sólo si $\vec{v}$ es paralelo a $\nabla f(\vec{x}_o)$.

Queremos hallar un vector $\vec{v}$ tal que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ sea lo más grande posible. Estos valores están acotados por $\|\nabla f(\vec{x}_o)\|$.

Como $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$, el vector

$$\vec{v_o} = \frac{1}{\|\nabla f(\vec{x}_o)\|} \nabla f(\vec{x}_o)$$

nos da la dirección de máximo crecimiento de f. □

8. Teorema del valor medio.

Teorema 3.45 (Teorema del valor medio para campos escalares). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in D$ tales que el segmento de recta L que une los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable entonces existe $\vec{c} \in L$ tal que*

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \langle \nabla f(\vec{c}), \vec{b} - \vec{a} \rangle.$$

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$. Entonces $\alpha'(t) = \vec{b} - \vec{a}$.

Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g = f \circ \alpha$. La función g es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$. Por el teorema del valor medio de Lagrange tenemos que existe $t_o \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(t_o).$$

Sea $\vec{c} = \alpha(t_o) = \vec{a} + t_o(\vec{b} - \vec{a})$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{b}) - f(\vec{a}) &= g(1) - g(0) = g'(t_o) \\ &= (f \circ \alpha)'(t_o) = \langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle \\ &= \langle \nabla f(\vec{c}), \vec{b} - \vec{a} \rangle \end{aligned}$$

□

Definición 3.46. Sean $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Una *trayectoria poligonal* desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ es una función continua $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(0) = \vec{a}$, $\varphi(1) = \vec{b}$ y $\varphi[0,1]$ es la unión de un número finito de segmentos de recta.

Definición 3.47. Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que D es *poligonalmente conexo* cuando para todo par de puntos $\vec{a}$, $\vec{b} \in D$ existe una trayectoria poligonal desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ cuya imagen está contenida en D.

Teorema 3.48. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto poligonalmente conexo. Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Si $f'(\vec{x}) = 0_{m \times n}$ para todo $\vec{x} \in D$ entonces f es constante en D.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que $m = 1$.

Sean $\vec{a}$, $\vec{b} \in D$ y φ una trayectoria poligonal desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ cuya imagen está contenida en D y que está formada por los segmentos de recta $L_1, \ldots, L_r$. Sean $\vec{v_o} = \vec{a}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{r-1}}, \vec{v_r} = \vec{b}$ los vértices de estos segmentos. Aplicando el teorema del valor medio para campos escalares a cada L_k obtenemos que existe $\vec{c_k} \in L_k$ tal que

$$f(\vec{v_k}) - f(\vec{v_{k-1}}) = \langle \nabla f(\vec{c_k}), \vec{v_k} - \vec{v_{k-1}} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v_k} - \vec{v_{k-1}} \rangle = 0.$$

De donde $f(\vec{v_o}) = f(\vec{v_1}) = \cdots = f(\vec{v_{r-1}}) = f(\vec{v_r})$. Y así $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$. Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ son cualesquiera se deduce que f es constante en D.

Para $m > 1$, basta aplicar lo que acabamos de demostrar para cada una de las funciones coordenadas.

□

OBSERVACIÓN 3.49. Se dice que un espacio métrico (X, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es conexo si (C, d_2) es un espacio métrico conexo. Se puede probar que un subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$ es conexo si y sólo si es poligonalmente conexo.

Recordemos que se dice que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es *convexo* cuando dados dos puntos del conjunto, el segmento que los une está contenido en el conjunto. Es decir, $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados $\vec{x}, \vec{y} \in D$ entonces $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in D$ para todo $t \in [0,1]$.

TEOREMA 3.50 (Teorema del valor medio para campos vectoriales). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Si $K \subset D$ es un conjunto compacto y convexo entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\|$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in K$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que $m = 1$.

Como K es compacto y las derivadas parciales de f son continuas existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\nabla f(\vec{z})\| \leq M$ para todo $\vec{z} \in K$.

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in K$, por el teorema del valor medio para campos escalares tenemos que existe $\vec{c} = \vec{c}(\vec{x}, \vec{y})$ tal que

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \langle \nabla f(\vec{c}), \vec{x} - \vec{y} \rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| = |\langle \nabla f(\vec{c}), \vec{x} - \vec{y} \rangle| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Ahora consideremos $m > 1$.

Por lo hecho antes, para cada $k = 1, \dots, m$, tenemos que existe $M_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f_k(\vec{x}) - f_k(\vec{y})|^2 \leq M_k^2 \|\vec{x} - \vec{y}\|^2,$$

para todo $\vec{x}$, $\vec{y} \in K$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| &= \sqrt{(f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y}))^2 + \cdots + (f_m(\vec{x}) - f_m(\vec{y}))^2} \\ &\leq \sqrt{M_1^2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \cdots + M_m^2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2} \\ &= \left(\sqrt{M_1^2 + \cdots + M_m^2}\right) \|\vec{x} - \vec{y}\|.\end{aligned}$$

□

9. Desarrollo de Taylor.

El caso de una variable. Recordemos que para funciones de una variable se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 3.51 (Taylor). *Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función tal que f', f'', $\ldots$, $f^{(N+1)}$ están definidas en $[\alpha, \beta]$, (N un entero positivo).*

Sean a y x distintos puntos del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Entonces existe un punto c entre a y x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}.$$

El polinomio

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se llama el polinomio de Taylor de grado N de f alrededor de a.

Si a las hipótesis del Teorema anterior agregamos que existe $M > 0$ tal que

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq M$$

para todo $x \in [\alpha, \beta]$, entonces tendremos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_N(x)}{(x-a)^N} = 0. \tag{3.1}$$

En particular, (3.1) se cumple si suponemos que $f^{(N+1)}$ es continua.

El caso de dos variables. Sea $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Supongamos que tenemos una función de clase $\mathcal{C}^2$

$$f : B((x_o, y_o), r) \to \mathbb{R}.$$

Sea $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(h_1, h_2)\| < r$ y, para $t \in [0, 1]$, sea

$$\varphi(t) = f((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)).$$

Entonces φ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ y, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= h_1\frac{\partial f}{\partial x}((x_o,y_o)+t(h_1,h_2)) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}((x_o,y_o)+t(h_1,h_2)),\\ \varphi''(t) &= h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((x_o,y_o)+t(h_1,h_2)) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}((x_o,y_o)+t(h_1,h_2))\\ &\quad + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((x_o,y_o)+t(h_1,h_2)),\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$.

Aplicando el Teorema de Taylor en el caso $N = 1$ a φ obtenemos que existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi). \tag{3.2}$$

Si $(c,d) = (x_o,y_o) + \xi(h_1,h_2)$ tenemos que $(c,d) \in B((x_o,y_o),r)$ y de (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned}f(x_o+h_1,y_o+h_2) &= f(x_o,y_o) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}((x_o,y_o)) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}((x_o,y_o))\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c,d) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(c,d) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c,d)\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Si suponemos que f es de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$, obtenemos que φ es también de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Por lo tanto podemos considerar los análogos de (3.2) y (3.3), pero derivando hasta el orden $N+1$. Esto nos lleva a una generalización del teorema de Taylor para funciones de dos variables. Esta generalización la vamos a describir a continuación sin demostraciones rigurosas. Debe estar claro para el lector como completar todos los detalles.

Definición 3.52. El número

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

se llama *coeficiente binomial*.

El coeficiente binomial aparece en la fórmula algebraica conocida como el *binomio de Newton*:

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{N-k}.$$

Recordemos que si f es una función de dos variables de clase $\mathcal{C}^N$entonces:

Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y},$$

y tenemos que

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Las derivadas parciales de orden k ($k \leq N$) son de la forma

$$f_{x\ y}^{j\ k-j} = \frac{\partial^k f}{\partial y^{k-j} \partial x^j} = \frac{\partial^{k-j}}{\partial y^{k-j}}\frac{\partial^j f}{\partial x^j}.$$

Definición 3.53. Sean $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ un entorno de (x_o, y_o). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^N$ en D, *el desarrollo de Taylor* de f de grado N alrededor de (x_o, y_o) es el polinomio

$$\begin{aligned}
P_N(x,y) = {} & f(x_o, y_o) \\
& + \frac{1}{1!}((x - x_o)f_x(x_o, y_o) + (y - y_o)f_y(x_o, y_o)) \\
& + \frac{1}{2!}((x - x_o)^2 f_{xx}(x_o, y_o) + 2(x - x_o)(y - y_o)f_{xy}(x_o, y_o) + (y - y_o)^2 f_{yy}(x_o, y_o)) \\
& + \dots \\
& + \frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(x - x_o)^k (y - y_o)^{N-k} f_{x\ y}^{k\ N-k}(x_o, y_o)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.54. Sea $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Calcularemos el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de $(0,0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - x^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= -xy(1+x^2+y^2)^{-3/2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - y^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 1, \\ &f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0, \\ &f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad y \quad f_{yy}(0,0) = 1. \end{aligned}$$

De donde

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Teorema 3.55. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Sean $(x_o,y_o),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que el segmento que los une está contenido en D. Entonces existe un punto $(c,d) \in D$ tal que*

$$f(x,y) = P_N(x,y) + \frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}(x-x_o)^k(y-y_o)^{N+1-k} f_{x\ y}^{k\ N+1-k}(c,d).$$

Corolario 3.56. *Con las mismas hipótesis que el* Teorema *anterior tenemos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y) - P_N(x,y)}{\|(x,y)-(x_o,y_o)\|^N} = 0.$$

El caso de n variables. Hemos visto que en el desarrollo de Taylor de una función de dos variables el coeficiente binomial es muy importante. Esto lo extenderemos a n variables.

Definición 3.57. El *coeficiente multinomial* es el número

$$\binom{k}{k_1 \dots k_j} = \frac{k!}{k_1! \dots k_j!}$$

donde $k_1 + \cdots + k_j = k$.

El coeficiente multinomial aparece en la siguiente fórmula algebraica:

$$(x_1 + \dots + x_j)^N = \sum_{k_1+\dots+k_j=N} \begin{pmatrix} N \\ k_1 \dots k_j \end{pmatrix} x_1^{k_1} \dots x_j^{k_j}.$$

La cual generaliza la fórmula del binomio de Newton.

Sea f una función de n variables, de clase $\mathcal{C}^N$. Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Las *derivadas parciales de primer orden* son

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con $1 \leq i \leq n$.

Las *derivadas parciales de segundo orden* son

$$f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Las *derivadas parciales de orden k* $(k \leq N)$ son de la forma

$$f_{x_1}^{k_1} \dots {}_{x_n}^{k_n} = \frac{\partial^k f}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_1^{k_1}}$$

donde $k_1 + \dots + k_n = k$.

Definición 3.58. Sean $\vec{x}_o \in \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un entorno de $\vec{x}_o$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^N$ en D, el *desarrollo de Taylor* de f de grado N alrededor de $\vec{x}_o$ es el polinomio

$$\begin{aligned} P_N(\vec{x}) &= f(\vec{x}_o) \\ &+ \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^o) f_{x_i}(\vec{x}_o) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{k_1+\dots+k_n=2} \begin{pmatrix} 2 \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix} (x_1 - x_1^o)^{k_1} \dots (x_n - x_n^o)^{k_n} f_{x_1}^{k_1} \dots {}_{x_n}^{k_n} (\vec{x}_o) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{N!} \sum_{k_1+\dots+k_n=N} \begin{pmatrix} N \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix} (x_1 - x_1^o)^{k_1} \dots (x_n - x_n^o)^{k_n} f_{x_1}^{k_1} \dots {}_{x_n}^{k_n} (\vec{x}_o). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.59. Sea

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp(x_1 + \dots + x_n).$$

El desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de $\vec{0}$ es

$$\begin{aligned} P_2(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ &+ \frac{1}{1!}(x_1 + \cdots + x_n) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j\leq n} x_i x_j\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 3.60. Escribir y probar los análogos del Teorema 3.55 y del Corolario 3.56 para funciones de n variables.

10. Cálculos aproximados y errores.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea g la función cuya gráfica es una recta que pasa por $(x_o, f(x_o))$ con pendiente $f'(x_o)$. Esto es

$$g(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Resulta que g aproxima bien a f en un entorno de x_o. Es decir, si $\|x - x_o\| \approx 0$ entonces

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable tendremos que si $\|\vec{x} - \vec{x}_o\| \approx \vec{0}$ entonces

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_o) + \langle \nabla f(\vec{x}_o), (\vec{x} - \vec{x}_o)\rangle.$$

Estas expresiones son muy útiles para hacer aproximaciones, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.61. Hallar aproximadamente el valor de $\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2}$.

Sea

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

queremos hallar $f(5.98, 8.01)$. Es fácil ver que

$$f(6, 8) = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Por lo tanto se aproximará el punto $(5.98, 8.01)$ por el punto $(6, 8)$.

Sean $\vec{x} = (5.98, 8.01)$ y $\vec{x}_o = (6, 8)$ entonces

$$\vec{x} - \vec{x}_o = (5.98, 8.01) - (6, 8) = (-0.02, 0.01)$$

Además

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Luego $\nabla f(6,8) = (6/10, 8/10)$. De donde

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}_o}(\vec{x} - \vec{x}_o) &= \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{x} - \vec{x}_o \rangle \\ &= \langle (6/10, 8/10), (-0.02, 0.01) \rangle = -0.004. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2} \approx 10 - 0.004 = 9.996.$$

11. Máximos y mínimos.

Definición 3.62. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *máximo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \geq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

Definición 3.63. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *mínimo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \leq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición 3.64. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ y f alcanza un máximo o un mínimo local en $\vec{x}_o$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.*

Demostración. Solamente lo probaremos cuando f alcanza un máximo local en $\vec{x}_o$, para un mínimo local la demostración es análoga. Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = \vec{x}_o + t\vec{v}$. La función $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\beta = f \circ \alpha$ tiene un máximo en $t = 0$. Así que

$$0 = \beta\,'(0) = (f \circ \alpha)'(0) = D_{\vec{v}} f(\alpha(0)) = D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o) = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle.$$

Como $\vec{v}$ es arbitrario, tenemos que $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.

□

Observación 3.65. El resultado anterior tiene una interpretación geométrica muy clara en el caso $n = 2$:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x,y,z) = z - f(x,y)$$

entonces el gráfico de f es igual a la superficie de nivel de F en 0. Y esta superficie es ortogonal al vector $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$. Como

$$\nabla F(x_o, y_o, z_o) = \left(-\frac{df}{dx}(x_o, y_o), -\frac{df}{dy}(x_o, y_o), 1\right)$$

Si suponemos que f alcanza un máximo en (x_o, y_o) entonces $\nabla f(x_o, y_o) = (0, 0)$ y por lo tanto

$$\nabla F(x_o, y_o, z_o) = (0, 0, 1).$$

De donde, el plano tangente a la superficie dada por el gráfico de f en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es ortogonal al vector $(0, 0, 1)$ y por lo tanto es paralelo al plano $z = 0$.

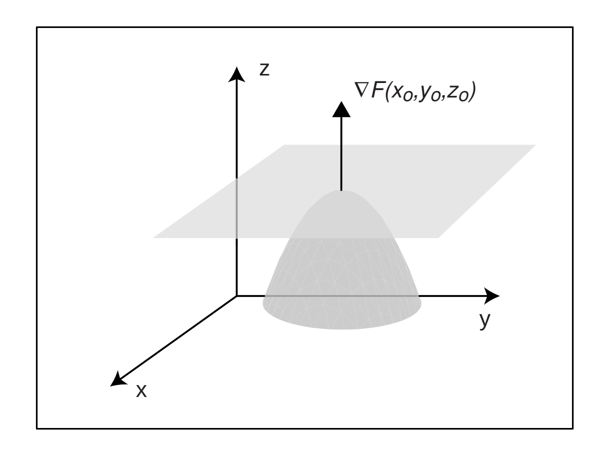


Figura 3.3.

Definición 3.66. Un punto $\vec{x}_o$ en el que $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$ es un *punto crítico* para f.

Observación 3.67. Al igual que en el caso de una variable puede ocurrir que $\nabla f(\vec{x}_o)$ sea igual a $\vec{0}$ y sin embargo en $\vec{x}_o$ no se alcance ni máximo ni mínimo para f.

Definición 3.68. Un punto crítico en el que f no alcanza ni máximo ni mínimo se llama *punto de ensilladura*.

Clasificación de los puntos críticos en el caso $n = 2$.

Definición 3.69. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, decimos que T es una *forma cuadrática* cuando existe una matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tal que

$$T(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} h_i h_j.$$

Definición 3.70. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, decimos que T es *definida positiva* cuando

(i) $T(h_1, h_2) \geq 0$ para todo $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) $T(h_1, h_2) = 0$ implica $(h_1, h_2) = (0, 0)$.

Lema 3.71. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la forma cuadrática dada por*

$$T(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2.$$

T *es definida positiva si y sólo si* $a > 0$ *y* $\det A = ac - b^2 > 0$.

Idea de la demostración. Notar que

$$T(h_1, h_2) = a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2.$$

□

Ejercicio 3.72. Demostrar que si

$$T(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2,$$

entonces $T(h_1, h_2) < 0$ para todo $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ si y sólo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$.

En este caso se dice que T es negativa definida.

Ejercicio 3.73. Demostrar que si

$$T(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$$

y $ac - b^2 < 0$ entonces T toma valores positivos y negativos.

En este caso se dice que T es indefinida.

Definición 3.74. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. El *hessiano* de f en (x, y) es la forma cuadrática $Hf_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Hf_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{1}{2}(f_{xx}(x, y)h_1^2 + 2f_{xy}(x, y)h_1h_2 + f_{yy}(x, y)h_2^2).$$

OBSERVACIÓN 3.75. Si consideramos la matriz

$$A_{(x,y)} = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

entonces

$$Hf_{(x,y)}(h_1,h_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} A_{(x,y)} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 3.76 (Criterio del hessiano). *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Sea*

$$\Delta(x,y) = det A_{(x,y)} = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

y sea $(x_o,y_o) \in D$ un punto crítico de f.

(i) *Si $f_{xx}(x_o,y_o) > 0$ y $\Delta(x_o,y_o) > 0$ entonces en (x_o,y_o) se alcanza un mínimo.*
(ii) *Si $f_{xx}(x_o,y_o) < 0$ y $\Delta(x_o,y_o) > 0$ entonces en (x_o,y_o) se alcanza un máximo.*
(iii) *Si $\Delta(x_o,y_o) < 0$ entonces (x_o,y_o) es un punto de ensilladura.*
(iv) *Si $\Delta(x_o,y_o) = 0$, el criterio no decide nada.*

DEMOSTRACIÓN. Solamente probaremos la parte (i), el resto queda como ejercicio.

Como $f_x(x_o,y_o) = f_y(x_o,y_o) = 0$, de la fórmula (3.3) sigue que si $r > 0$ es tal que $B((x_o,y_o),r) \subset D$ y $\|(h_1,h_2)\| < r$ entonces

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) = f(x_o,y_o) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(c,d) + 2h_1h_2 f_{xy}(c,d) + h_2^2 f_{yy}(c,d)\right),$$

donde el vector (c,d) está en el segmento que une (x_o,y_o) y $(x_o + h_1, y_o + h_2)$, es decir,

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) - f(x_o,y_o) = Hf_{(c,d)}(h_1,h_2).$$

Por la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden se tiene que, para $\|(h_1,h_2)\|$ pequeño $Hf_{(x_o,y_o)}(h_1,h_2)$ y $Hf_{(c,d)}(h_1,h_2)$ tienen el mismo signo así que

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o,y_o) \geq 0$$

para todo $(h,k) \in V$.

Por lo tanto en (x_o,y_o) se alcanza un mínimo.

□

OBSERVACIÓN 3.77. Usando resultados de álgebra lineal sobre clasificación de forma cuadráticas y el teorema de Taylor es posible establecer criterios análogos al anterior para funciones de tres o más variables.

Ejemplo 3.78.

(a) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Ya vimos que el gráfico de f es un paraboloide de revolución.Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Luego f alcanza un mínimo en $(0,0)$.

(b) Sea $f(x,y) = xy$.

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (y, x).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Luego f posee un punto de ensilladura en $(0,0)$.

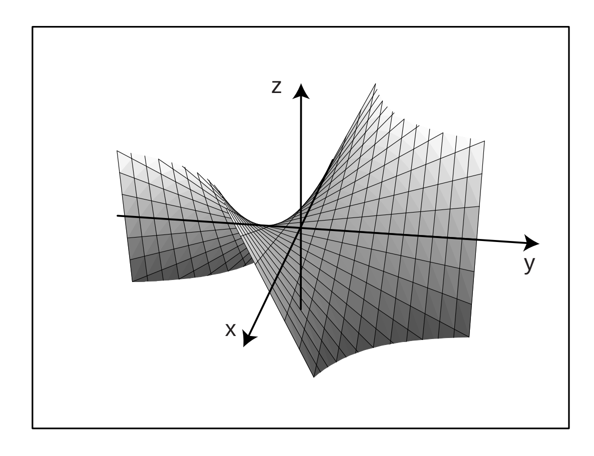


Figura 3.4. Gráfico de $f(x,y) = xy$.

(c) Sea $f(x,y) = 1 - y^2$.

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (0, -2y).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $y = 0$. Luego todos los puntos de la forma $(x,0)$ son un puntos críticos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0) = -2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0.$$

El criterio del hessiano no es aplicable en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un máximo en cada punto de la forma $(x,0)$.

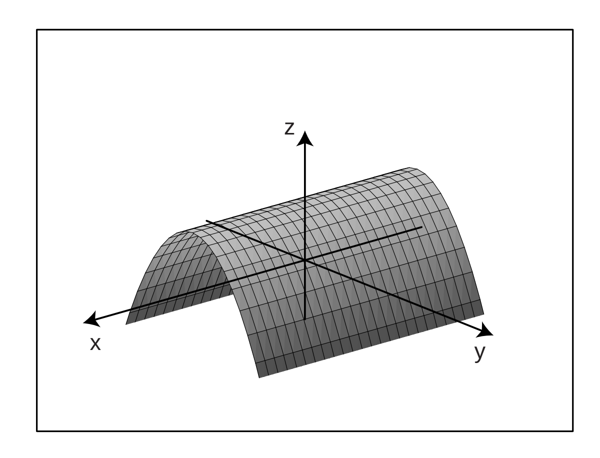


FIGURA 3.5. Gráfico de $f(x,y) = 1 - y^2$.

(d) Sea $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

El criterio del hessiano no da información en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un punto de ensilladura en $(0,0)$

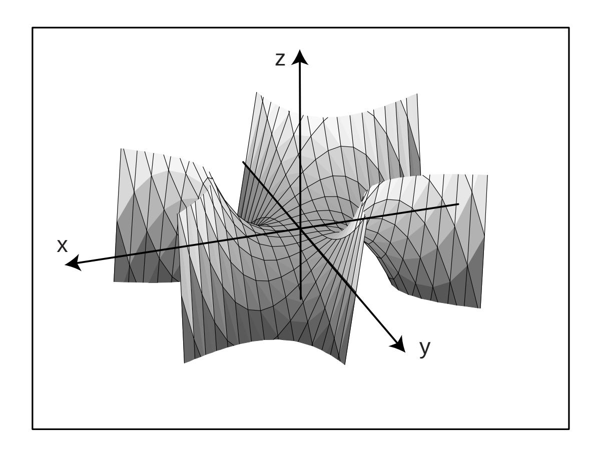


FIGURA 3.6. Gráfico de $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Ejercicios 3.

(1) Hallar las derivadas parciales respecto a x e y.

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4$.

(b) $f(x,y) = x^2y^4 + 2xy - 6$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

(e) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$.

(f) $f(x,y) = \cos(xe^y)$.

(2) Hallar f_x y f_y en los valores indicados.

(a) $f(x,y) = x \operatorname{arcsen}(x-y)$ en $x = 1$, $y = 2$.

(b) $f(x,y) = e^{xy}\sec\left(\frac{x}{y}\right)$ en $x = y = 3$.

(3) Si $z = f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, demostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(4) Dada $z = u(x,y)e^{ax+by}$ donde u es tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$. Hallar valores de a y b de manera que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

(5) Sea $v(r,t) = t^u e^{-\frac{r^2}{4t}}$. Hallar un valor de la constante u tal que v satisfaga la siguiente ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

(6) Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables:

(a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^2$.

(b) $f(x,y) = y\operatorname{sen}(xy)$.

(7) Demostrar que la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $(0,0)$. Pero no es diferenciable en $(0,0)$.

(8) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x+y}\right) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que

(a) f es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f son discontinuas en $(0,0)$.

(9) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

(d) Explicar porqué no se cumple el resultado dado en clase sobre independencia del orden de derivación al calcular las derivadas parciales.

(10) Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\vec{x}_0 \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Considerar las seis proposiciones siguientes:

(a) f es continua en $\vec{x}_0$.

(b) f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

(c) $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

(d) Existen todas las derivadas parciales de f en un entorno de $\vec{x}_0$.

(e) Existen todas las derivadas parciales de f en un entorno de $\vec{x}_0$ y son continuas en $\vec{x}_0$.

(f) $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$

En una tabla como la siguiente, marcar con una V (de verdadero) si la proposición de la fila (x) implica la proposición de la columna (y). Por ejemplo, si fuese cierto que (a) implica (b), se debe poner una V en el segundo cuadrado de la primera fila.

	a	b	c	d	e	f
a	V					
b		V				
c			V			
d				V		
e					V	
f						V

(11) Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $p(x, y) = xy$. Demostrar, directamente de la definición, que p es diferenciable en todo punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y que $dp_{(a,b)}(x, y) = bx + ay$.

(12) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demostrar, a partir de la definición, que f es diferenciable en todo punto $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y hallar $df_{\vec{v}}$.

(13) Para cada función halle el vector gradiente en cada punto en el que exista.
(a) $f(x, y) = e^{xy} \cos y$. (b) $f(x, y, z) = xyz$. (c) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$.

(14) Hallar ∇f en el punto dado.
(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}$ en $(0, -2)$.
(b) $f(x, y, z) = \cos xy + \cos xz + \cos yz$ en $(1, 2, -1)$.

(15) Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie en el punto dado:
(a) $z = x^2 + 2y^2$ en $(2, -1, 6)$.
(b) $z = xy$ en $(2, -1, -2)$.
(c) $z = x^2y^2$ en $(-2, 2, 16)$.
(d) $z = e^{2x} \cos 3y$ en $(1, \frac{\pi}{3}, -e^2)$.
(e) $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ en $(-3, 4, \ln 5)$.

(16) Probar que todo plano tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

(17) Hallar las ecuaciones de la recta tangente a la intersección de las dos superficies dadas en el punto dado. (Verifique antes que el punto dado realmente pertenece a la intersección de las dos superficies).

(a) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x + 4y + 20$, $(4, -2, 20)$.

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2x - 3y - 13$, $(3, -4, 5)$.

(18) Halle los puntos de la superficie $z = x^2 - 2y^2 + 3y - 6$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 3y + z = 5$.

(19) Usando diferenciales calcule un valor aproximado de $\sqrt{(3,02)^2 + (1,99)^2 + (5,97)^2}$.

(20) Usar la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

(a) $z = x^2 + y^2$ para $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$.

(b) $z = \dfrac{x}{x+y}$ para $x = s\cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$.

(c) $z = e^x \cos y$ para $x = s^2 + 2t^2$, $y = 3 \operatorname{sen} t$.

(21) Usar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales indicadas en los valores dados.

(a) $z = x^2 - y^2$, para $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ en $r = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $w = xy + yz + zx$, para $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, calcular $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ en $t = \dfrac{\pi}{4}$.

(c) $w = e^{xyz} \cos xyz$, para $x = r^2 + t^2$, $y = t^2 + r$, $z = r + t$, calcular $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ en $r = 2$, $t = -2$.

(22) Consideremos un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ f definido en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y)$ sólo depende de la distancia de (x, y) al origen, es decir, $f(x, y) = g(r)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Demostrar que para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$

(b) Supongamos que además f satisface la *ecuación de Laplace*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Demostrar que, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b,$$

donde a y b son constantes.

(23) *Laplaciano bi-dimensional en coordenadas polares.* La introducción de coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, transforma $f(x, y)$ en $g(r, \theta)$. Demostrar las siguientes fórmulas (suponer f de clase $\mathcal{C}^2$):

(a) $\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}.$

(24) *Laplaciano tridimensional en coordenadas esféricas.* La introducción de coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

transforma $f(x, y, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$. Este ejercicio indica como hay que proceder para expresar el laplaciano $\nabla^2 f$ en función de las derivadas parciales de F (suponer f de clase $\mathcal{C}^2$).

(a) Introducir primero las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar $f(x, y, z)$ en $g(r, \theta, z)$. Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(b) Luego transformar $g(r, \theta, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$ tomando $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\operatorname{sen}\varphi$. Observar que, salvo un cambio de notación, esta es la misma transformación que se utilizó en la parte (a). Deducir que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

(25) Sea f una función de tres variables con derivadas parciales continuas y definamos $g(t) = f(tx, ty, tz)$. Demostrar que:

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

(26) En cierto instante la altura h de un cono circular recto es de 30 cm. y está creciendo a razón de 2cm/seg. En ese mismo instante el radio r de la base es de 20cm. y está creciendo a razón de 1cm/seg. ¿A qué velocidad crece el área lateral A del cono?

(27) En cierto instante el radio r de la base de un cilindro circular recto es de 10 cm. y la altura h es de 15 cm. En ese instante el radio decrece a razón de 5 cm/seg y la altura crece a razón de 4 cm/seg. ¿Con qué rapidez cambia el volumen V?

(28) Halle la derivada direccional en el punto p en la dirección $\vec{pp'}$. Es decir, si $\vec{v}_0$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{pp'}$, debe hallar $D_{\vec{v}_0} f(p)$.
(a) $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + z^2 \qquad p = (1, 0, 2), p' = (-1, 3, 4)$.
(b) $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z \qquad p = (2, 1, 0), p' = (-1, 2, 2)$.
(c) $f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos y \qquad p = (2, 1, 0), p' = (1, 4, 2)$.

(29) Demostrar que la siguiente función f tiene derivada en cada dirección en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(30) Para las dos funciones que siguen, demostrar que existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$. ¿ Son las funciones continuas en $(0, 0)$?

$$\text{(a) } f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6} & \text{si } x^3 + y^6 \neq 0; \\ 0 & \text{si } x^3 + y^6 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(b) } g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(31) Un campo escalar f está definido en $\mathbb{R}^3$ mediante la ecuación $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$, donde $\vec{a}$ es un vector constante. Calcular la derivada de f en la dirección de cualquier vector unitario.

(32) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada, consideremos el campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido mediante la ecuación $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, T\vec{x} \rangle$. Calcular la derivada de f en la dirección de cualquier vector unitario.

(33) Hallar los valores de las constantes a, b, c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

(34) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ (b) $f(x,y) = x^2 + 1 - y^2$.

(35) Encontrar el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor del punto (x_0, y_0) para las funciones $f_1(x,y) = e^x \cos y$ y $f_2(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.

(36) Demostrar la unicidad del diferencial de una función.

(37) Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\vec{x_0} \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $\vec{x_0}$. Demostrar que:

(a) $\nabla(f+g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0})$.

(b) $\nabla(f.g)(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})$.

(c) $\nabla \left(\dfrac{f}{g} \right)(\vec{x_0}) = \dfrac{g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) - f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})}{(g(\vec{x_0}))^2}$ si $g(\vec{x_0}) \neq 0$.

(38) Encuentre el desarrollo de Taylor de tercer grado de $(u+v)^3$

(a) Alrededor del punto $(u_0, v_0) = (0,0)$.

(b) Alrededor del punto $(u_0, v_0) = (1,2)$.

(39) Encuentre la mejor aproximación de segundo grado de la función $f(x,y) = xe^y$ cerca del punto $(x_0, y_0) = (2,0)$.

(Respuesta: $2 + (x-2) + 2y + y^2 + (x-2)y$.)

(40) (a) Calcule el desarrollo de Taylor de segundo grado de $f(x,y,z) = xy^2z^3$ alrededor de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

(b) Exprese el polinomio $f(x,y,z) = xy^2z^3$ como un polinomio en $(x-1), y, (z+1)$.

(41) Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos del dominio y determinar su matriz jacobiana en los siguientes casos:

(a) $f(x, y, z) = (xz, y + z)$.

(b) $f(x, y, z) = (xy, y^2, z^2x)$.

(c) $f(x, y, z) = (x/y\,, 2y + 1, xz^2)$.

(42) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente:

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(y + 2x)),$$
$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

(a) Calcular cada una de las matrices jacobianas Df y Dg.

(b) Hallar la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

(c) Calcular la matriz jacobiana Dh en $(1, -1, 1)$.

(43) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2),$$
$$g(u, v, w) = (uv^2w^2, w^2 \operatorname{sen} v, u^2e^v).$$

(a) Calcular cada una de las matrices jacobianas Df y Dg.

(b) Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

(c) Calcular la matriz jacobiana $Dh(u, 0, w)$.

(44) Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y a una constante. Consideremos la función u dada por

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Demostrar que

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(45) Demostrar que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces

$$\frac{d}{dx} g(x, x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, x)$$

(46) La sustitución

$$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

cambia $f(u,v)$ en $F(x,y)$. Aplicar la regla de la cadena para expresar $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

(47) Halle una fórmula para $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ en los siguientes casos:

(a) $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(b) $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))$.

(48) Sea F un campo vectorial derivable dado por $F = (P,Q,R)$. Halle una fórmula para

$$\text{rot}F = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right).$$

en los siguientes casos:

(a) $F(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$,

(b) $F(x,y,z) = (y-z, yz, -xz)$.

(49) Sea F un campo vectorial derivable dado por $F = (P,Q,R)$. En los siguientes casos halle una fórmula para

$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$,

(b) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

(50) El siguiente ejercicio ilustra los peligros de denotar funciones como variables reales.

Sean $w = f(x,y,z)$ y $z = g(x,y)$ entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

ya que $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$. Por lo tanto, $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Sin embargo, para el caso particular en que $w = x+y+z$ se tiene que $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, de donde $1 = 0$. ¿ Dónde está el error?

CAPÍTULO 4

El teorema de la función implícita.

1. El teorema del punto fijo.

DEFINICIÓN 4.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\varphi : X \to X$ una función. Se dice que φ es una *contracción* si existe $r \in (0,1)$ tal que

$$\mathrm{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq r \ \mathrm{d}(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

OBSERVACIÓN 4.2. Claramente toda contracción es una función continua.

TEOREMA 4.3 (Teorema del punto fijo). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\varphi : X \to X$ una contracción. Entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$. Más aún, si x_1 es cualquier elemento de X, entonces la sucesión definida por*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

converge a x

DEMOSTRACIÓN.

Demostremos primero la existencia.

Sea $x_1 \in X$ arbitrario.

Consideremos la sucesión definida por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Como φ es una contracción existe $r \in (0,1)$ tal que

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) = \mathrm{d}(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \leq r \ \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n),$$

de donde sigue por inducción que

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \leq r^{n-1} \, \mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Luego, si $0 < n < m$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_n, x_m) &\leq \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \mathrm{d}(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq (r^{n-1} + \cdots + r^{m-2}) \, \mathrm{d}(x_2, x_1) \\
&\leq r^{n-1}(1 + r + r^2 + \cdots) \, \mathrm{d}(x_2, x_1),
\end{aligned}$$

usando la fórmula para la suma de la serie geométrica se obtiene

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \left(\frac{\mathrm{d}(x_2, x_1)}{1 - r} \right) r^{n-1}.$$

De esta última desigualdad sigue inmediatamente que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como (X, d) es un espacio métrico completo, $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in X$. Por ser φ continua tenemos que

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que $x^* \in X$ y $\varphi(x^*) = x^*$. Entonces

$$\mathrm{d}(x^*, x) = \mathrm{d}(\varphi(x^*), \varphi(x)) \leq r\, \mathrm{d}(x^*, x).$$

Como $r \in (0, 1)$ debe ser $\mathrm{d}(x^*, x) = 0$.

□

OBSERVACIÓN 4.4. Un punto $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$ es lo que se llama un punto fijo para φ. El teorema anterior suele enunciarse de la siguiente manera: "Toda contracción en un espacio métrico completo posee un único punto fijo".

2. El caso de una variable.

2.1. Método de la tangente de Newton. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos hallar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir queremos hallar $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$.

Supongamos que f es derivable.

Sea $x_1 \in \mathbb{R}$ un punto cualquiera, consideremos la recta L_1, tangente al gráfico de f en el punto $(x_1, f(x_1))$.

La ecuación de L_1 es

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Sea $x_2 \in \mathbb{R}$ el punto de corte de la recta L_1 con el eje x, entonces

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

es decir,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Podemos repetir este proceso: considerar la recta L_2, tangente al gráfico de f en el punto $(x_2, f(x_2))$, hallar su punto de corte x_3 con el eje x, y así sucesivamente.

De esta manera se obtiene una sucesión, definida en forma recursiva, dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

El siguiente gráfico sugiere que la sucesión $\{x_k\}$ converge a una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

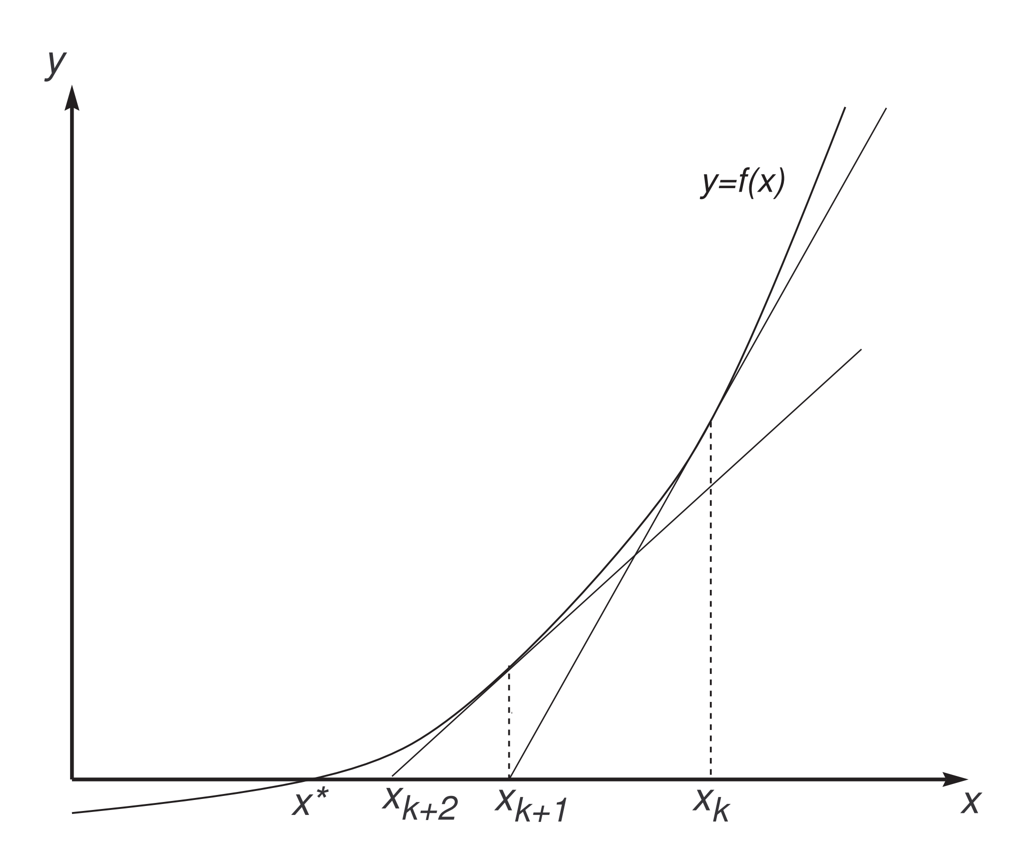


FIGURA 4.1. Método de la tangente de Newton

Se puede probar que, bajo ciertas hipótesis, la sucesión $\{x_k\}$ converge a un número x^* tal que $f(x^*) = 0$. Más adelante estudiaremos con más detalle este problema, considerando una sucesión ligeramente modificada.

Es importante destacar que el método de la tangente de Newton no siempre funciona bien. A continuación se ilustran, mediante gráficos, situaciones en las que el método puede resultar inadecuado.

En el siguiente ejemplo, la tangente al gráfico de f en el punto $(x_2, f(x_2))$ es horizontal ($f'(x_2) = 0$), por lo tanto x_3 no está definido.

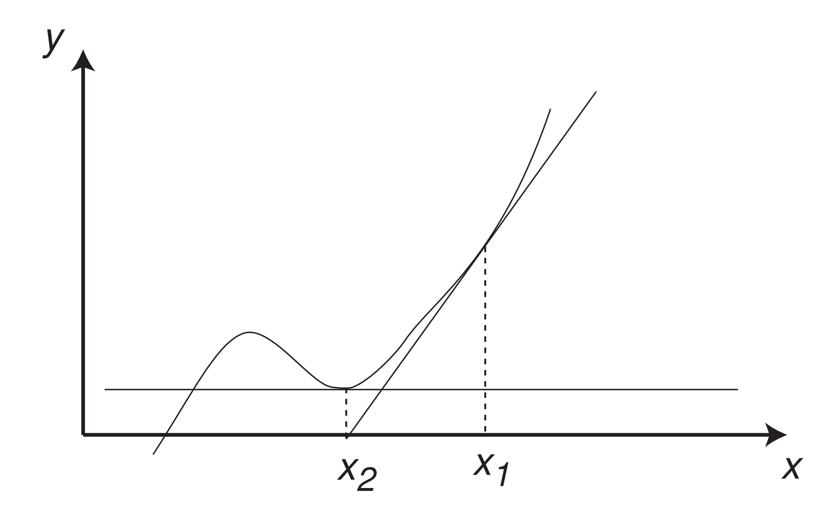


FIGURA 4.2.

En el siguiente ejemplo la sucesión se aleja del punto que estamos buscando.

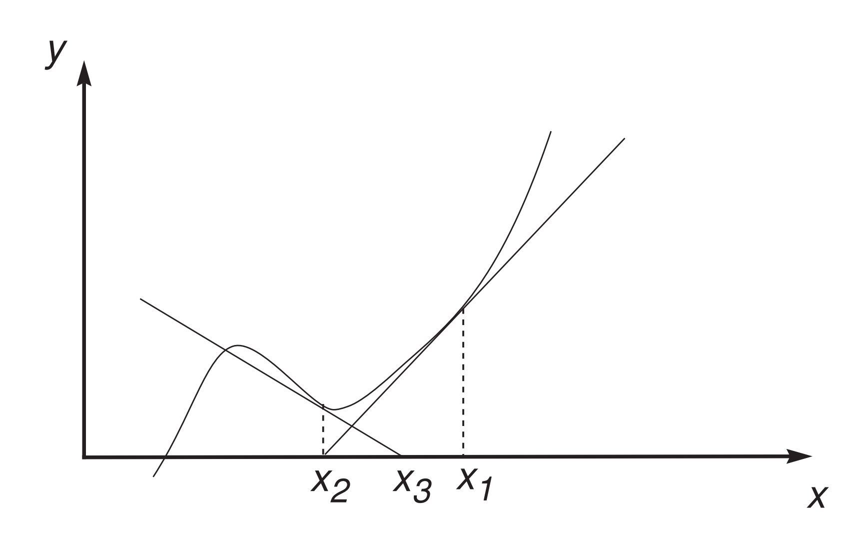


FIGURA 4.3.

En el siguiente ejemplo la sucesión oscila entre dos puntos.

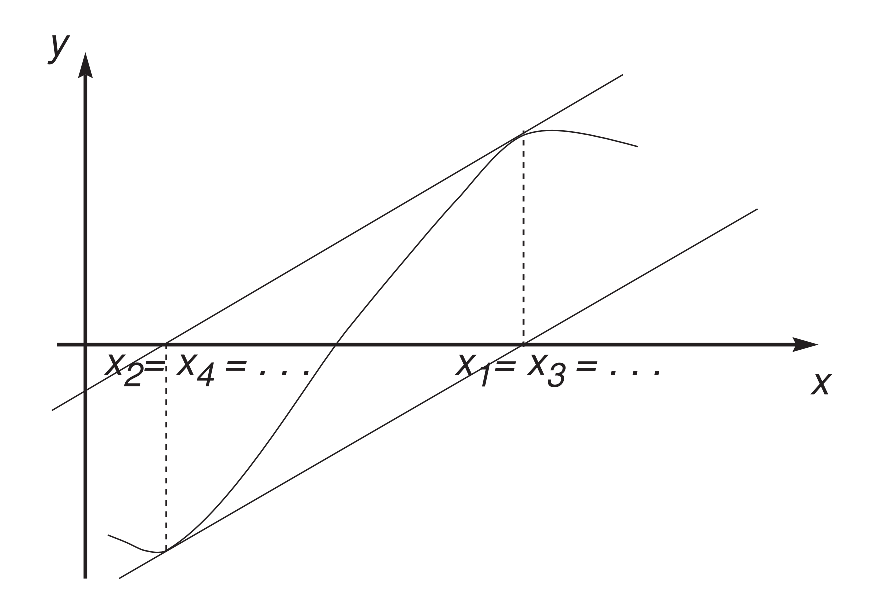


Figura 4.4.

2.2. Método de la tangente de Newton modificado. Al utilizar el método de la tangente de Newton para aproximar los ceros de una función f es necesario calcular $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, etc... Existen formas de modificar la sucesión $\{x_k\}$ para simplificar los cálculos. Una simplificación que funciona bastante bien es la siguiente:

Supongamos que la derivada de f es acotada, que f tiene un cero en el intervalo $[a, b]$ y que $f'(x) > 0$ en $[a, b]$.

Sea $M = \max\{f'(x) : x \in [a, b]\}$, comenzamos con un punto x_1 y consideramos la recta de pendiente M que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$, esta recta corta al eje x en el punto

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{M}.$$

Si continuamos repitiendo este proceso obtenemos la siguiente sucesión:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}.$$

La siguiente gráfica sugiere que si tomamos x_1 en forma adecuada debemos aproximarnos a un cero de f.

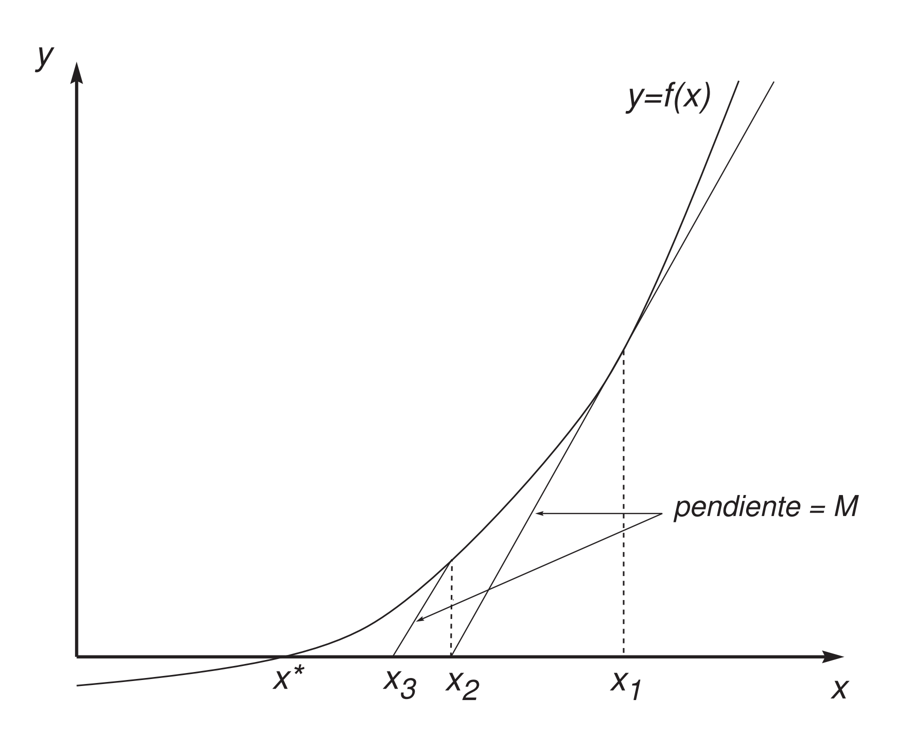


FIGURA 4.5. Método de Newton modificado

La demostración de la convergencia de este método no es difícil y la damos a continuación.

TEOREMA 4.5. *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos*

(a) $f(a) < 0 < f(b)$,

(b) *Existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $0 < m < f'(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.*

Entonces, si $x_1 \in [a,b]$, la sucesión definida por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}$$

converge al único punto $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(u) = u - \frac{f(u)}{M}.$$

Vamos a probar que φ es una contracción de $[a,b]$ en $[a,b]$.

Como $\varphi'(u) = 1 - [f'(u)/M]$ tenemos que

$$0 \leq \varphi'(u) \leq 1 - \frac{m}{M} = r < 1, \tag{4.1}$$

para todo $u \in [a, b]$, por lo tanto φ es una función no decreciente. Luego

$$a < a - \frac{f(a)}{M} = \varphi(a) \leq \varphi(u) \leq \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{M} < b$$

para todo $u \in [a, b]$. De esta última desigualdad se concluye que $\varphi[a, b] \subset [a, b]$ y del teorema del valor medio y la desigualdad (4.1) sigue que φ es una contracción.

Como $[a, b]$ es un espacio métrico completo, del Teorema 4.3 sigue que φ tiene un único punto fijo.

Para terminar la demostración basta notar que $\varphi(x) = x$ si y sólo si $f(x) = 0$.

□

Ejercicio 4.6. Utilizar el Teorema anterior para demostrar que la sucesión definida por

$$x_1 = 2$$
$$x_{k+1} = \frac{2 + 4x_k - x_k^2}{4}$$

es convergente. También hallar su límite.

Ejercicio 4.7. Demostrar directamente que la sucesión definida en el ejercicio anterior es de Cauchy.

2.3. Cálculo de la inversa local de una función mediante aproximaciones sucesivas. Supongamos que tenemos una función f tal que $f(a) = b$ y que queremos resolver la ecuación $f(x) = y$ para y cercano a b. Esto equivale a hallar un cero de la función $\gamma(x) = f(x) - y$. Al aplicar el método de la tangente de Newton a esta función obtenemos la sucesión definida por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\gamma(x_k)}{\gamma'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k) - y}{f'(x_k)}.$$

A continuación vamos a probar que bajo ciertas hipótesis, si el punto y se encuentre suficientemente cerca de b, una sucesión un poco más sencilla, en la que $f'(x_k)$ se reemplaza por $f'(a)$, converge al punto buscado x.

Teorema 4.8. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $a \in I$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existen un entorno U de a y un entorno V de $f(a)$ tales que, dado $y \in V$ la sucesión $\{x_k\}$ definida por*

$$x_1 = a \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) - y}{f'(a)},$$

converge a un único punto $x \in U$ tal que $f(x) = y$.

Demostración. Por la continuidad de f', existe $\delta > 0$ tal que

$$|f'(a) - f'(u)| \leq \frac{1}{2}\,|f'(a)| \qquad \text{si} \qquad u \in [a-\delta, a+\delta].$$

Sean $U = (a-\delta, a+\delta)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\,\delta|f'(a)|$ y $V = (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

Para $y \in V$, sea $\varphi_y : \overline{U} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi_y(u) = u - \frac{f(u)-y}{f'(a)}.$$

Vamos a probar que φ_y es una contracción de $\overline{U}$ en $\overline{U}$.

Primero notemos que

$$|\varphi_y'(u)| = \left|1 - \frac{f'(u)}{f'(a)}\right| = \frac{|f'(a)-f'(u)|}{|f'(a)|} \leq \frac{1}{2}$$

para $u \in \overline{U}$. Aplicando el Teorema de Lagrange tenemos que φ_y es una contracción de constante $\frac{1}{2}$. Por otra parte, si $u \in \overline{U} = [a-\delta, a+\delta]$ entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi_y(u) - a| &\leq |\varphi_y(u) - \varphi_y(a)| + |\varphi_y(a) - a| \\
&\leq \frac{1}{2}|u-a| + \frac{|f(a)-y|}{|f'(a)|} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{|f'(a)|} \\
&= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\varphi_y(\overline{U}) \subset \overline{U}$.

Como $\overline{U}$ es un espacio métrico completo, por el teorema del punto fijo, existe un único $x \in \overline{U}$, que se obtiene como límite de la sucesión definida en el enunciado, tal que $\varphi_y(x) = x$ y por lo tanto $f(x) = y$. Para terminar basta notar que como la imagen inversa de V bajo f es un conjunto abierto entonces el mencionado punto x debe estar en $U = (a-\delta, a+\delta)$.

$\square$

Ejercicio 4.9. Interpretar y justificar gráficamente el resultado anterior.

Observación 4.10. Este Teorema proporciona un método para obtener la inversa de una función mediante aproximaciones sucesivas.

Con las mismas hipótesis y notación del Teorema anterior, dado $y \in V$, sea $g(y)$ el único punto de U tal que $f(g(y)) = y$ (f y g son inversas locales).

Si definimos una sucesión de funciones $\{g_k\}$ por

$$g_1(y) = a \qquad g_{k+1}(y) = g_k(y) - \frac{f(g_k(y)) - y}{f'(a)}, \tag{4.2}$$

obtenemos que esta sucesión de funciones converge a g.

3. Algunas consecuencias del teorema del valor medio.

Del Teorema 3.45 y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce el siguiente resultado.

Teorema 4.11. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in D$ tales que el segmento de recta L que une los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces*

$$|f(\vec{b}) - f(\vec{a})| \leq \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x} \in L} \|\nabla f(\vec{x})\|.$$

Notar que, como f se supone de clase $\mathcal{C}^1$ y L es compacto, entonces $\|\nabla f(\vec{x})\|$ alcanza su valor máximo en L.

Teorema 4.12. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in D$ tales que el segmento de recta L que une los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces*

$$\|f(\vec{b}) - f(\vec{a})\| \leq \sqrt{m}\, \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x} \in L} \|f'(\vec{x})\|_M.$$

Demostración. Sean $f_1, \dots, f_m$ las funciones coordenadas de f, es decir $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, donde cada f_k es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$. Por el Teorema 4.11 tenemos que, para $k = 1, \dots, m$,

$$|f_k(\vec{b}) - f_k(\vec{a})| \leq \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x} \in L} \|\nabla f_k(\vec{x})\|.$$

Por otra parte, como

$$\|f'(\vec{x})\|_M = \sqrt{\|\nabla f_1(\vec{x})\|^2 + \cdots + \|\nabla f_m(\vec{x})\|^2},$$

tenemos que

$$\max_{\vec{x} \in L} \|\nabla f_k(\vec{x})\| \leq \max_{\vec{x} \in L} \|f'(\vec{x})\|_M,$$

de donde se concluye que

$$|f_k(\vec{b}) - f_k(\vec{a})| \leq \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x} \in L} \|f'(\vec{x})\|_M.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{b}) - f(\vec{a})\| &= \sqrt{(f_1(\vec{b}) - f_1(\vec{a}))^2 + \cdots + (f_m(\vec{b}) - f_m(\vec{a}))^2} \\
&\leq \sqrt{m\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 \left(\max_{\vec{x}\in L} \|f'(\vec{x})\|_M\right)^2} \\
&= \sqrt{m}\, \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x}\in L} \|f'(\vec{x})\|_M.
\end{aligned}$$

□

COROLARIO 4.13. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que el segmento de recta L que une los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal, entonces*

$$\|f(\vec{b}) - f(\vec{a}) - T(\vec{b} - \vec{a})\| \leq \sqrt{m}\, \|\vec{b} - \vec{a}\| \max_{\vec{x}\in L} \|f'(\vec{x}) - A_T\,\|_M,$$

donde A_T es la matriz de T en la base canónica.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : D \to \mathbb{R}^m$ la función definida por

$$g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - T(\vec{x}).$$

Claramente g es de clase $\mathcal{C}^1$ y $g'(x) = f'(\vec{x}) - A_T$ para todo $\vec{x} \in D$.

Aplicando el Teorema 4.12 a g obtenemos el resultado.

□

El siguiente corolario es una aplicación un poco más profunda del teorema del valor medio y nos ilustra como, las funciones diferenciables heredan en forma local, las propiedades de su diferencial. Es importante notar que el resultado correspondiente para funciones de una variable es sumamente sencillo de probar.

COROLARIO 4.14. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\vec{a} \in D$ y $df_{\vec{a}}$ es inyectivo entonces f es inyectiva en un entorno de $\vec{a}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\alpha = \min_{\|\vec{x}\|=1} \|df_{\vec{a}}(\vec{x})\|.$$

Como estamos suponiendo que $df_{\vec{a}}$ es inyectivo se puede probar que $\alpha > 0$.

Sea ε un número positivo tal que $\varepsilon < \alpha$. Como f es de clase $\mathcal{C}^1$, existe $r > 0$ tal que si $\|\vec{x} - \vec{a}\| < r$ entonces

$$\|f'(\vec{x}) - f'(\vec{a})\|_M < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos elementos de $B(\vec{a},r)$. Aplicando el Corolario 4.13 con $T = df_{\vec{a}}$, $\vec{a} = \vec{x}$, $\vec{b} = \vec{y}$ y L el segmento que une a $\vec{x}$ y $\vec{y}$ obtenemos

$$\|f(\vec{y}) - f(\vec{x}) - df_{\vec{a}}(\vec{y} - \vec{x})\| \leq \sqrt{m}\|\vec{y} - \vec{x}\| \max_{\vec{z}\in L} \|f'(\vec{z}) - f'(\vec{a})\|_M < \varepsilon\|\vec{y} - \vec{x}\|.$$

Por uno de los corolarios de la desigualdad triangular tenemos que

$$|\ \|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| - \|df_{\vec{a}}(\vec{y} - \vec{x})\|\ | < \varepsilon\|\vec{y} - \vec{x}\|,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| &> \|df_{\vec{a}}(\vec{y} - \vec{x})\| - \varepsilon\|\vec{y} - \vec{x}\| \\ &\geq (\alpha - \varepsilon)\|\vec{y} - \vec{x}\|.\end{aligned}$$

Luego si $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$ y $\vec{x} \neq \vec{y}$ entonces $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.

□

4. Teorema de la función inversa.

LEMA 4.15. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $\vec{0} \in D$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(\vec{0}, r) \subset D$. Sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ y $df_{\vec{0}} = I$. Supongamos que existe λ, $0 < \lambda < 1$, tal que*

$$\max_{\vec{z}\in\overline{B}(\vec{0},r)} \|f'(\vec{z}) - I\|_M < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.$$

Entonces

(i) $\overline{B}(\vec{0}, (1 - \lambda)r) \subset f(\overline{B}(\vec{0}, r)) \subset \overline{B}(\vec{0}, (1 + \lambda)r)$

(ii) *Si $V = B(\vec{0}, (1-\lambda)r)$ y $U = B(\vec{0}, r) \cap f^{-1}(V)$, entonces $f|_U : U \to V$ es una función biyectiva, su inversa $g : V \to U$ es diferenciable en $\vec{0}$ y $dg_{\vec{0}} = I$.*

(iii) *La inversa local $g : V \to U$ es el límite de la sucesión $\{g_k\}$ de aproximaciones sucesivas definidas inductivamente por*

$$g_1(\vec{y}) = \vec{0}, \qquad g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f(g_k(\vec{y})) + \vec{y}$$

para $\vec{y} \in V$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{B}(\vec{0}, r)$. Aplicando el Corolario 4.13 con $\vec{a} = \vec{x}$, $\vec{b} = \vec{y}$ y $T = df_{\vec{0}} = I$ obtenemos

$$\|f(\vec{y}) - f(\vec{x}) - (\vec{y} - \vec{x})\| \leq \sqrt{n}\, \|\vec{y} - \vec{x}\| \max_{\vec{z}\in\overline{B}(\vec{0},r)} \|f'(\vec{z}) - I\|_M \leq \lambda\|\vec{y} - \vec{x}\|, \tag{4.3}$$

por uno de los corolarios de la desigualdad triangular

$$|\ \|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| - \|(\vec{y} - \vec{x})\|\ | \leq \lambda\|\vec{y} - \vec{x}\|.$$

Por lo tanto

$$(1-\lambda)\|\vec{y}-\vec{x}\| \leq \|f(\vec{y})-f(\vec{x})\| \leq (1+\lambda)\|\vec{y}-\vec{x}\|, \tag{4.4}$$

para todo $\vec{x},\vec{y}\in \overline{B}(\vec{0},r)$. La desigualdad de la izquierda prueba que f es inyectiva en $\overline{B}(\vec{0},r)$. Considerando la desigualdad de la derecha para $\vec{x}=\vec{0}$ obtenemos

$$f(\overline{B}(\vec{0},r)) \subset \overline{B}(\vec{0},(1+\lambda)r).$$

Debemos probar que $f(\overline{B}(\vec{0},r))$ contiene a $\overline{B}(\vec{0},(1-\lambda)r)$. Esto lo probaremos utilizando el teorema del punto fijo. Dado $\vec{y}\in\overline{B}(\vec{0},(1-\lambda)r)$, sea $\varphi_{\vec{y}}: D\to\mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi_{\vec{y}}(\vec{u}) = \vec{u} - f(\vec{u}) + \vec{y}.$$

Veamos que $\varphi_{\vec{y}}(\overline{B}(\vec{0},r)) \subset \overline{B}(\vec{0},r)$. Sea $\vec{u}\in\overline{B}(\vec{0},r)$. Tomemos en cuenta que $f(\vec{0})=0$ y $df_{\vec{0}}=I$, aplicando el Corolario 4.13 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\vec{y}}(\vec{u})\| &\leq \|f(\vec{u})-\vec{u}\| + \|\vec{y}\| \\
&= \|f(\vec{u}) - f(\vec{0}) - df_{\vec{0}}(\vec{u}-\vec{0})\| + \|\vec{y}\| \\
&\leq \sqrt{n}\,\|\vec{u}\| \max_{\vec{z}\in\overline{B}(\vec{0},r)} \|f'(\vec{z}) - f'(\vec{0})\|_M + \|\vec{y}\| \\
&= \sqrt{n}\,\|\vec{u}\| \max_{\vec{z}\in\overline{B}(\vec{0},r)} \|f'(\vec{z}) - I\|_M + \|\vec{y}\| \\
&\leq \sqrt{n}\,\|\vec{u}\| \frac{\lambda}{\sqrt{n}} + \|\vec{y}\| = \lambda\|\vec{u}\| + \|\vec{y}\| \\
&\leq \lambda\, r + (1-\lambda)\, r \\
&= r.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Veamos que $\varphi_{\vec{y}}:\overline{B}(\vec{0},r)\to\overline{B}(\vec{0},r)$ es una contracción. Sean $\vec{u},\vec{z}\in\overline{B}(\vec{0},r)$ entonces, por (4.3) tenemos que

$$\|\varphi_{\vec{y}}(\vec{u}) - \varphi_{\vec{y}}(\vec{z})\| = \|f(\vec{u}) - f(\vec{z}) - (\vec{u}-\vec{z})\| \leq \lambda\|\vec{u}-\vec{z}\|.$$

Por el teorema del punto fijo existe un único $\vec{x}\in\overline{B}(\vec{0},r)$ tal que $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x})=\vec{x}$, es decir $f(\vec{x})=\vec{y}$. De donde $\vec{y}\in f(\overline{B}(\vec{0},r))$.

(ii) De (4.5) sigue que $\varphi_{\vec{y}}(\overline{B}(\vec{0},r)) \subset B(\vec{0},r)$ si $\vec{y}\in B(\vec{0},(1-\lambda)r)$. Por lo tanto si $\vec{y}\in V = B(\vec{0},(1-\lambda)r)$ el punto fijo de $\varphi_{\vec{y}}$ está en $B(\vec{0},r)$, luego dado $\vec{y}\in V$ existe un único $\vec{x}\in B(\vec{0},r)$ tal que $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x})=\vec{x}$, o equivalentemente, $f(\vec{x})=\vec{y}$.

Se ha probado que si $U = B(\vec{0},r)\cap f^{-1}(V)$, entonces $f|_U : U\to V$ es una función biyectiva. Nos falta probar que la inversa de esta función $g: V\to U$ es diferenciable en $\vec{0}$ y

$dg_{\vec{0}} = I$. Como $g(\vec{0}) = \vec{0}$ es suficiente probar

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|g(\vec{h}) - \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0. \tag{4.6}$$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in U$, de la desigualdad (4.4) sigue que

$$(1-\lambda)\|\vec{y} - \vec{x}\| \leq \|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\|.$$

Sea $\vec{h} \in V$, entonces $g(\vec{h}) \in U$ y, como $V \subset U$, también tenemos que $\vec{h} \in U$. Considerando la desigualdad anterior para $\vec{x} = \vec{h}$ y $\vec{y} = g(\vec{h})$ obtenemos

$$(1-\lambda)\|g(\vec{h}) - \vec{h}\| \leq \|\vec{h} - f(\vec{h})\|,$$

luego, si $\vec{h} \neq \vec{0}$

$$\frac{\|g(\vec{h}) - \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} \leq \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\left(\frac{\|\vec{h} - f(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}\right).$$

Como f es diferenciable en $\vec{0}$ y $f'(\vec{0}) = I$ tenemos que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{h}) - \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|g(\vec{h}) - \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

(iii) El punto fijo $\vec{x} = g(\vec{y})$ es el límite de la sucesión

$$\vec{x}_1 = \vec{0} \qquad \vec{x}_{k+1} = \varphi_{\vec{y}}(\vec{x}_k),$$

para $\vec{y} \in V$. Sea $g_k(\vec{y}) = \vec{x}_k$ entonces g es el límite de la sucesión $\{g_k\}$ de aproximaciones sucesivas definidas inductivamente por

$$g_1(\vec{y}) = \vec{0}, \qquad g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f(g_k(\vec{y})) + \vec{y}.$$

□

Teorema 4.16 (Teorema de la función inversa). *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\vec{x}_o \in D$ tal que $f'(\vec{x}_o)$ tiene inversa.*

Entonces existe un conjunto abierto $U \subset D$ tal que:

(a) *$\vec{x}_o \in U$.*
(b) *$f(U)$ es abierto.*
(c) *$f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva y su inversa $g : f(U) \to U$ es de clase $\mathcal{C}^1$.*
(d) *Si $\vec{x} \in U$ entonces $f'(x)$ es invertible y $g'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$ para todo $\vec{x} \in U$.*

(e) *La inversa local* $g : V \to U$ *es el límite de la sucesión* $\{g_k\}$ *de aproximaciones sucesivas definidas inductivamente por*

$$g_1(\vec{y}) = \vec{x}_o, \qquad g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f'(\vec{x}_o)^{-1}[\,f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,]$$

para $\vec{y} \in V$.

Demostración.

Para $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sea $S_{\vec{a}}$ la traslación en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$S_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}.$$

Fijemos $\lambda \in (0, 1)$. La función que manda al par$(\vec{x}, \vec{y})$ en $f'(\vec{x})(f'(\vec{y}))^{-1}$ es continua. Luego existe un abierto $D_o \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in D_o$, $f'(\vec{x})$ es invertible para todo $\vec{x} \in D_o$ y

$$\|f'(\vec{x})(f'(\vec{y}))^{-1} - I\|_M < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \tag{4.7}$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in D_o$.

Para $\vec{a} \in D_o$ sean $T_{\vec{a}} = d_{\vec{a}}f$ y $f_{\vec{a}} : T_{\vec{a}}(S_{\vec{a}}^{-1}(D_o)) \to \mathbb{R}^n$ la función definida por

$$f_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\,S_{f(\vec{a})}^{-1} \circ f \circ S_{\vec{a}} \circ T_{\vec{a}}^{-1}\,)(\vec{x}).$$

Tenemos que $f_{\vec{a}}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $\vec{0} \in T_{\vec{a}}(S_{\vec{a}}^{-1}(D_o))$, $f_{\vec{a}}(\vec{0}) = \vec{0}$ y

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = f'(S_{\vec{a}}(T_{\vec{a}}^{-1})(\vec{x}))(f'(\vec{a}))^{-1}.$$

De esta última igualdad y de 4.7 podemos concluir que

$$\|f'_{\vec{a}}(\vec{x}) - I\|_M < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \tag{4.8}$$

para todo $\vec{x} \in T_{\vec{a}}(S_{\vec{a}}^{-1}(D_o))$.

Consideremos ahora $f_{\vec{x}_o}$. Tenemos que $f'_{\vec{x}_o}(\vec{0}) = I$ y

$$\|f'_{\vec{x}_o}(\vec{x}) - I\|_M < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \tag{4.9}$$

para todo $\vec{x} \in T_{\vec{x}_o}(S_{\vec{x}_o}^{-1}(D_o))$.

El conjunto $T_{\vec{x}_o}(S_{\vec{x}_o}^{-1}(D_o))$ es un abierto que contiene al vector $\vec{0}$. Por lo tanto existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(\vec{0}, r) \subset T_{\vec{x}_o}(S_{\vec{x}_o}^{-1}(D_o))$.

Por el Lema 4.15 existen dos entornos de $\vec{0}$, $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ tales que $\tilde{U} \subset \overline{B}(\vec{0}, r)$, $f_{\vec{x}_o}|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ es una función biyectiva, su inversa $g_{\vec{x}_o} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ es diferenciable en $\vec{0}$. Además la inversa local $g_{\vec{x}_o}$ es el límite de la sucesión $\{\tilde{g}_k\}$ de aproximaciones sucesivas definidas por

$$\tilde{g}_1(\vec{y}) = \vec{0}, \qquad \tilde{g}_{k+1}(\vec{y}) = \tilde{g}_k(\vec{y}) - f_{\vec{x}_o}(\tilde{g}_k(\vec{y})) + \vec{y} \tag{4.10}$$

para $\vec{y} \in \tilde{V}$.

Sean $U = S_{\vec{x}_o}(T_{\vec{x}_o}^{-1}(\tilde{U}))$, $V = S_{f(\vec{x}_o)}(\tilde{V})$ y $g : \tilde{V} \to \tilde{U}$ definida por

$$g(\vec{y}) = (\, S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_{\vec{x}_o} \circ S_{f(\vec{x}_o)}^{-1}\,)(\vec{y}).$$

Como

$$f(\vec{x}) = (\, S_{f(\vec{x}_o)} \circ f_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1}\,)(\vec{x})$$

y la función $g_{\vec{x}_o}$ es la inversa de $f_{\vec{x}_o}$ tenemos que:

(1) $\vec{x}_o \in U$,
(2) $V = f(U)$ es abierto,
(3) $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva.

Además $g : f(U) \to U$ es su inversa. Como $g_{\vec{x}_o}$ es diferenciable en $\vec{0}$ tenemos que g es diferenciable en $f(\vec{x}_o) = S_{f(\vec{x}_o)}(\vec{0})$.

Sea $\vec{y}_1 \in V$. Vamos a probar que g es diferenciable en $\vec{y}_1$. Para esto consideramos $\vec{x}_1 = g(\vec{y}_1) \in U$. Por la desigualdad 4.8 tenemos que

$$\|f'_{\vec{x}_1}(\vec{x}) - I\|_M < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$$

para todo $\vec{x}$ en un entorno de 0. Procediendo de la misma manera que con $\vec{x}_o$ obtenemos que la inversa local de f es diferenciable en $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1)$. Como la inversa local es única podemos concluir que g es diferenciable en $\vec{y}_1$.

Si $\vec{x} \in U$ tenemos que $g(f(\vec{x})) = \vec{x}$, derivando y usando la regla de la cadena obtenemos $g'(f(\vec{x}))f'(\vec{x}) = I$. Es decir, $f'(\vec{x})$ es invertible y

$$g'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}.$$

De que f es de clase $\mathcal{C}^1$, de esta última igualdad y la fórmula para inversión de matrices usando determinantes sigue que: g es de clase $\mathcal{C}^1$.

Sólo nos falta por verificar (e). La sucesión $\{g_k\}$ de aproximaciones sucesivas para g se obtiene a partir de las aproximaciones sucesivas $\{\tilde{g}_k\}$ de $g_{\vec{x}_o}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g_k(\vec{y}) &= (\, S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1} \circ \tilde{g}_k \circ S_{f(\vec{x}_o)}^{-1}\,)(\vec{y}) \\ &= (\, S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1} \circ \tilde{g}_k\,)(\vec{y} - f(\vec{x}_o)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Luego

$$T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k(\vec{y}) = \tilde{g}_k\,(\vec{y} - f(\vec{x}_o)). \tag{4.12}$$

Debemos verificar que esta sucesión $\{g_k\}$ coincide con la indicada en (e).

En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} g_1(\vec{y}) &= (\, S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1} \circ \tilde{g}_1 \,)(\vec{y} - f(\vec{x}_o)) \\ &= S_{\vec{x}_o}(\vec{0}) = \vec{x}_o. \end{aligned}$$

Por 4.10 sabemos que

$$\tilde{g}_{k+1}(\vec{y} - f(\vec{x}_o)) = \tilde{g}_k(\vec{y} - f(\vec{x}_o)) - f_{\vec{x}_o}(\, \tilde{g}_k(\, \vec{y} - f(\vec{x}_o)\,)\,) + (\vec{y} - f(\vec{x}_o)).$$

De esta igualdad, de 4.11, de 4.12 y de la definición de $f_{\vec{x}_o}$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_{k+1}(y)\,) &= (\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y}) - f_{\vec{x}_o}(\,(\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y})\,) + (\vec{y} - f(\vec{x}_o)) \\ &= (\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y}) \\ &\qquad - (\, S_{f(\vec{x}_o)}^{-1} \circ f \circ S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1} \circ T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y}) + (\vec{y} - f(\vec{x}_o)) \\ &= (\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y}) - (\, S_{f(\vec{x}_o)}^{-1} \circ f \circ g_k \,)(\vec{y}) + (\vec{y} - f(\vec{x}_o)) \\ &= (\, T_{\vec{x}_o} \circ S_{\vec{x}_o}^{-1} \circ g_k \,)(\vec{y}) - [\, f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,]. \end{aligned}$$

Aplicando $S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1}$ a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - S_{\vec{x}_o} \circ T_{\vec{x}_o}^{-1}[\, f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,].$$

Por lo tanto

$$g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f'(\vec{x}_o)^{-1}[\, f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,]$$

que es lo que queríamos probar. □

Ejemplo 4.17. Consideremos la transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta).$$

Su matriz jacobiana es

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Si $r \neq 0$ esta matriz es invertible, con inversa

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\dfrac{1}{r}\operatorname{sen}\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Por el teorema de la función inversa, dado un punto $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tal que $r \neq 0$, existe un entorno V de (r, θ) tal que $f(V)$ es abierto y $f : V \to f(V)$ es invertible con inversa diferenciable.

Notar que f es localmente invertible y sin embargo no es invertible.

5. Funciones definidas implícitamente.

5.1. El caso bidimensional.

Definición 4.18. Sea $V \subset \mathbb{R}$. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f : V \to \mathbb{R}$ funciones. Se dice que f está *definida implícitamente* por la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

si $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in V$.

Ejemplo 4.19. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Consideremos las siguientes funciones:

$$f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1,$$
$$f_2(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1,$$
$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Tenemos que f_1, f_2 y f_3 están definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Dadas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables, tales que $F(x, f(x)) = 0$, vamos a calcular la derivada de f a partir de las derivadas parciales de F. Sean $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $h(x) = (x, f(x))$ y $H = F \circ h$. Entonces

$$H'(x) = \langle \nabla F(x, f(x)), h'(x) \rangle = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x).$$

Si $F(x, f(x)) = 0$ entonces $H(x) = 0$. De donde $H'(x) = 0$. Luego

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 4.20. *Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Si $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ y f está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$ entonces*

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

EJEMPLO 4.21. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Sea f una función diferenciable definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$. Por la proposición anterior

$$f'(x) = -(2f(x))^{-1}2x = \frac{-x}{f(x)}.$$

En particular si $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{si } |x| \leq 1$$

entonces, para $|x| \leq 1$,

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5.2. El caso general.

DEFINICIÓN 4.22. Sean $V \subset \mathbb{R}^n$. Sean $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \to \mathbb{R}^m$ funciones. Se dice que f está *definida implícitamente* en V por la ecuación

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$$

si $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in V$.

EJEMPLO 4.23. Las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0, \end{cases}$$

determinan las variables y, z como función de la variable x.

En efecto, sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$3z + 2x = 0$$

y por lo tanto $z = -\dfrac{2x}{3}$.

Además

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0, \\ -x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

luego

$$x + 3y = 0$$

y por lo tanto $y = -\dfrac{x}{3}$.

Sean

$$F(x,(y,z)) = (x+y+z, x-y+2z),$$
$$f(x) = \left(-\frac{x}{3}, -\frac{2x}{3}\right),$$

entonces

$$F(x,f(x)) = F\left(x, \left(-\frac{x}{3}, -\frac{2x}{3}\right)\right) = \left(x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3}, x + \frac{x}{3} - \frac{4x}{3}\right) = (0,0).$$

Es decir, f está definida implícitamente por la ecuación $F(x,(y,z)) = (0,0)$.

Notación. Sea $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ una función.

Los vectores de $\vec{z} \in \mathbb{R}^{n+m}$ los denotaremos de la siguiente manera

$$\vec{z} = (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Sean

$$F_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x},\vec{y}) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x},\vec{y}) \end{bmatrix}$$

y

$$F_{\vec{y}}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} (\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(\vec{x},\vec{y}) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x},\vec{y}) \end{bmatrix}$$

Proposición 4.24. *Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos.*

Sea $f : V \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in D$ para todo $\vec{x} \in V$.

Sea $F : D \to \mathbb{R}^m$ tal que f está definida implícitamente en V por la ecuación $F(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$. Si

(a) *f es diferenciable*

(b) *F es diferenciable*

(c) *$F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x}))$ es invertible*

entonces

$$f'(\vec{x}) = -(F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})))^{-1} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})).$$

Demostración. Derivaremos con respecto a $\vec{x}$ la ecuación

$$F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ definida por

$$h(\vec{x}) = (\vec{x}, f(\vec{x}))$$

y sea $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $H = F \circ h$ entonces

$$H(\vec{x}) = F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Luego

$$0_{mxn} = H'(\vec{x}) = F'(\vec{x}, f(\vec{x})) \begin{bmatrix} I \\ f'(\vec{x}) \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
0_{mxn} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\vec{x}, f(\vec{x})) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})) & F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ f'(\vec{x}) \end{bmatrix} \\
&= F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})) + F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})) \cdot f'(\vec{x}).
\end{aligned}$$

De donde

$$f'(\vec{x}) = -(F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})))^{-1} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})).$$

□

6. Teorema de la Función Implícita.

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que la ecuación $F(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$ defina una función f implícitamente.

Teorema 4.25 (Teorema de la función implícita). *Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un abierto y $F : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si para algún $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y algún $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^m$ se tiene que*

(i) $F(\vec{x_0},\vec{y_0}) = \vec{0}$.

(ii) $F_{\vec{y}}(\vec{x_0},\vec{y_0})$ *tiene inversa .*

Entonces existe un entorno B de $\vec{x_0}$, un entorno V de $(\vec{x}_o,\vec{y}_o)$ y una función $f : B \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

(a) $f(\vec{x_0}) = \vec{y_0}$,

(b) $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in D$ *para todo* $\vec{x} \in B$,

(c) $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}$ *para todo* $\vec{x} \in B$,

(d) *Si* $\vec{x} \in B$ *entonces la ecuación*

$$F(\vec{x},\vec{y}) = 0$$

para $(\vec{x},\vec{y}) \in V$, *tiene solución única y está dada por*

$$\vec{y} = f(\vec{x}).$$

Además,

$$f'(\vec{x}) = -(F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})))^{-1} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x}))$$

para todo $\vec{x} \in B$.

Demostración. Consideremos las proyecciones

$$P_1 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad P_2 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$$

dadas por

$$P_1(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}, \qquad P_2(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}.$$

La idea de la demostración es aplicar el Teorema de la función inversa a la función

$$G(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, F(\vec{x},\vec{y})).$$

(Notar que si existieran f y G^{-1} tendríamos $G(\vec{x}, f(\vec{x})) = (\vec{x}, F(\vec{x}, f(\vec{x}))) = (\vec{x},\vec{0})$ y podríamos tomar $f(\vec{x}) = P_2\, G^{-1}(\vec{x},\vec{0})$.)

Sea $G : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ definida por

$$G(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, F(\vec{x},\vec{y})).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} G_1(\vec{x},\vec{y}) &= x_1 \\ &\vdots \\ G_n(\vec{x},\vec{y}) &= x_n \\ G_{n+1}(\vec{x},\vec{y}) &= F_1(\vec{x},\vec{y}) \\ &\vdots \\ G_{n+m}(\vec{x},\vec{y}) &= F_m(\vec{x},\vec{y}) \end{aligned}$$

Entonces la matriz jacobiana de G es

$$G'(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x},\vec{y}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(\vec{x},\vec{y}) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x},\vec{y}) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x},\vec{y}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto G es de clase $\mathcal{C}^1$.

Como $F_{\vec{y}}(\vec{x_0},\vec{y_0})$ tiene inversa entonces todas las columnas de $G'(\vec{x_0},\vec{y_0})$ son linealmente independientes. Por lo tanto $G'(\vec{x_0},\vec{y_0})$ es invertible.

Por el Teorema de la Función Inversa (Teorema 4.16) existe un abierto $V \subset D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tal que:

(a) V es un entorno de $(\vec{x_0},\vec{y_0})$ en $\mathbb{R}^{n+m}$.
(b) $G(V)$ es abierto.
(c) $G|_V : V \to G(V)$ es inyectiva y tiene una inversa G^{-1} de clase $\mathcal{C}^1$.
(d) $(G^{-1})'(G(\vec{x},\vec{y})) = (G'(\vec{x},\vec{y}))^{-1}$ para todo $(\vec{x},\vec{y}) \in V$.

Como $(\vec{x_0},\vec{y_0}) \in V$ y

$$G(\vec{x_0},\vec{y_0}) = (\vec{x_0}, F(\vec{x_0},\vec{y_0})) = (\vec{x_0},\vec{0})$$

entonces

(i) $(\vec{x_0},\vec{0}) \in G(V)$,
(ii) $G(V)$ es un entorno de $(\vec{x_0},\vec{0})$ en $\mathbb{R}^{n+m}$,
(iii) $\vec{x_0} = P_1 \circ G^{-1}(\vec{x_0},\vec{0})$.

Sea

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (\vec{x}, \vec{0}) \in G(V)\}.$$

Entonces $\vec{x_0} \in B$ y B es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definimos $f : B \to \mathbb{R}^m$ mediante

$$f(\vec{x}) = (P_2 \circ G^{-1})(\vec{x}, \vec{0}).$$

Tenemos que

$$f(\vec{x_0}) = (P_2 \circ G^{-1})(\vec{x_0}, \vec{0})) = P_2(\vec{x_0}, \vec{y_0}) = \vec{y_0}.$$

Además

$$G^{-1}(\vec{x}, \vec{0}) = ((P_1 \circ G^{-1})(\vec{x}, \vec{0}), (P_2 \circ G^{-1})(\vec{x}, \vec{0})) = (\vec{x}, f(\vec{x})).$$

Por lo tanto

$$G(\vec{x}, f(\vec{x})) = (\vec{x}, \vec{0}).$$

Luego

$$F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Si $\vec{x} \in B$, $(\vec{x}, \vec{y}) \in V$ y $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ entonces

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{0}).$$

De la inyectividad de $G|_V$ sigue que $\vec{y} = f(\vec{x})$.

La función f es de clase $\mathcal{C}^1$ por ser la composición de funciones de clase $\mathcal{C}^1$. De la Proposición 4.24 se obtiene la fórmula para $f'(\vec{x})$.

$\square$

Ejemplo 4.26. Demostrar que existe una función f, definida en un entorno del punto $(1, 1)$ y a valores reales tal que:

(a) $f(1, 1) = 2$

(b) Si $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$ entonces

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

para todo (x, y) en el dominio de f.

Claramente F es de clase $\mathcal{C}^1$ y $F(1, 1, 2) = 0$.

$$F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy,$$

de donde $F_z(1, 1, 2) = 9 \neq 0$.

Del Teorema de la función implícita sigue el resultado.

7. Introducción al concepto de superficie.

El caso bidimensional. A lo largo de estas notas hemos usado varias veces, de una manera intuitiva e informal, el concepto de superficie. En esta sección usaremos las herramientas que hemos desarrollado para precisar este concepto y algunas de sus propiedades.

A nivel muy intuitivo, una superficie es un objeto que obtenemos al "deformar" de manera "no muy violenta" una lámina delgada de goma o cualquier otro material flexible.

Al tratar de precisar este concepto es bastante claro que una superficie debe ser la imagen de una función, cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, ya que al deformar la lámina delgada de goma lo que estamos haciendo es reubicar, de manera continua, unos puntos del plano en el espacio. El hecho de que la deformación no sea "muy violenta" se traduce en exigir ciertas condiciones de regularidad a la función, tales como diferenciabilidad, o ser $\mathcal{C}^1$, etc.

Por lo dicho anteriormente, una primera aproximación al concepto de superficie sería el de la imagen de una función $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que tenemos una función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\},$$

y supongamos que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ para $(x, y, z) \in S$. Si $(x_o, y_o, z_o) \in S$ entonces al menos una de las derivadas parciales de primer orden de g evaluada en (x_o, y_o, z_o) no es nula. Si tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq \vec{0}$$

entonces, por el teorema de la función implícita, podemos expresar a z como función de x y de y en un entorno D de (x_o, y_o), es decir existe un campo escalar φ definido en D tal que

$$g(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

De esta manera tenemos que una parte de S la podemos obtener como la imagen de la función $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)).$$

Sin embargo, no podemos garantizar que toda la superficie S la podemos obtener como la imagen de una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

A continuación daremos una definición formal de superficie. Esta definición es, básicamente, la que se encuentra en los libros de geometría diferencial. Es importante aclarar que le hemos hecho algunas simplificaciones y adaptaciones en función del nivel de estas notas. Antes de llegar a ella necesitamos ciertas definiciones preliminares.

Definición 4.27. Una *carta de coordenadas* es un par (α, D) donde D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ es una función inyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $d\alpha_{(u,v)}$ es inyectiva para todo $(u, v) \in D$.

Observación 4.28. Es importante destacar que las siguientes condiciones son equivalentes a la condición $d\alpha_{(u,v)}$ inyectiva para todo $(u, v) \in D$:

(a) La matriz $\alpha'(u, v)$ tiene rango 2 para todo $(u, v) \in D$.
(b) Si $(u, v) \in D$ entonces los vectores $d\alpha_{(u,v)}(e_1)$ y $d\alpha_{(u,v)}(e_2)$ son linealmente independientes.
(c) Si $(u, v) \in D$ entonces $d\alpha_{(u,v)}(\mathbb{R}^2)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, de dimensión 2.

Además tenemos que

$$d\alpha_{(u,v)}(e_1) = \alpha_u(u, v) \quad \text{y} \quad d\alpha_{(u,v)}(e_2) = \alpha_v(u, v).$$

Ejercicio 4.29. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $\varphi : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demostrar que la función $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$$

es una carta de coordenadas.

Definición 4.30. Una *superficie* es un par $(S, \mathcal{A})$, donde S es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{A}$ es una colección de cartas de coordenadas tales que:

(a) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Imagen}(\alpha) = S$.
(b) Si $(\alpha, D_\alpha), (\beta, D_\beta) \in \mathcal{A}$ y $\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta) \neq \emptyset$ entonces la función

$$\beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta)) \to \mathbb{R}^2$$

es de clase $\mathcal{C}^1$

Es usual referirse a la superficie $(S, \mathcal{A})$ simplemente como la superficie S, es decir, sólo se hace mención al conjunto S. El conjunto $\mathcal{A}$ se suele llamar un *atlas* para S.

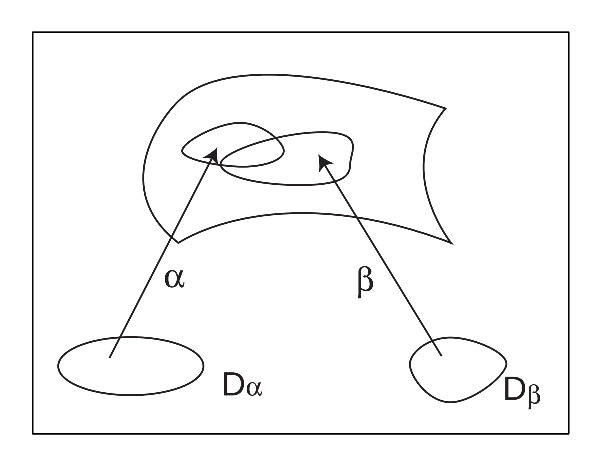


FIGURA 4.6.

TEOREMA 4.31. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, sea $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sea*

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\}.$$

Si $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ para todo $(x, y, z) \in S$ entonces S es una superficie.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_o, y_o, z_o) \in S$. Entonces al menos una de las derivadas parciales de primer orden de g evaluada en (x_o, y_o, z_o) no es nula. Si tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$$

entonces, por el teorema de la función implícita, existe un entorno D de (x_o, y_o) y un campo escalar φ de clase $\mathcal{C}^1$ definido en D tal que $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ y $\varphi(x_o, y_o) = z_o$. Además existe un entorno de (x_o, y_o, z_o) tal que todo punto $(x, y, z) \in S$ que se encuentra en este entorno satisface $z = \varphi(x, y)$

Sea $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)).$$

Por el ejercicio 4.29 tenemos que α es una carta.

Notemos que si en vez de tener $f_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ tuviésemos que $f_y(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ habríamos obtenido una carta de la forma $\alpha(u, w) = (u, \varphi(u, w), w)$, etc.

Lo anterior nos permite garantizar la existencia de un conjunto de cartas de coordenadas que cubren a S, nos falta probar que si la intersección de la imagen de dos de estas cartas es no vacía, entonces se cumple la condición (b) de la definición. Vamos a hacer la demostración de esto en un caso particular de cartas; de este caso particular va a resultar claro como proceder en los casos restantes.

Supongamos que tenemos dos cartas (α, D_α) y (β, D_β) que satisfacen:

$\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta) \neq \emptyset$.

$\alpha(u,v) = (u, v, \varphi_1(u,v))$, donde $\varphi_1 : D_\alpha \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

$\beta(u,w) = (u, \varphi_2(u,w), w)$, donde $\varphi_2 : D_\beta \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

Sean $\tilde{\alpha} : D_\alpha \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\tilde{\beta} : D_\beta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$\tilde{\alpha}(u,v,w) = (u, v, \varphi_1(u,v) + w) \qquad \tilde{\beta}(u,v,w) = (u, \varphi_2(u,w) + v, w).$$

Entonces $\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta) \subset \tilde{\alpha}(D_\alpha \times \mathbb{R}) \cap \tilde{\beta}(D_\beta \times \mathbb{R})$ y $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son de clase $\mathcal{C}^1$ e inyectivas. Además

$$\tilde{\beta}'(u,v,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,w) & 1 & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial w}(u,w) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz siempre tiene rango 3, por el teorema de la función inversa $\tilde{\beta}^{-1} : \tilde{\beta}(D_\alpha \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Por lo tanto

$$\tilde{\beta}^{-1} \circ \tilde{\alpha} : \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}(D_\alpha \times \mathbb{R}) \cap \tilde{\beta}(D_\beta \times \mathbb{R})) \to \mathbb{R}^3$$

es de clase $\mathcal{C}^1$.

Para terminar basta notar que, con las identificaciones naturales de D_α con $D_\alpha \times \{0\}$ y D_β con $D_\beta \times \{0\}$, tenemos que la función

$$\beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta)) \to \mathbb{R}^2$$

es la restricción de $\tilde{\beta}^{-1} \circ \tilde{\alpha}$ al conjunto

$$\alpha^{-1}(\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta)).$$

□

Recordemos que si la superficie S está dada en la forma $z = \varphi(x,y)$ entonces la ecuación de su plano tangente en el punto $(x_o, y_o, \varphi(x_o, y_o))$ es

(4.13) $$z = \varphi(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_o, y_o).$$

La carta $\alpha(u,v) = (u, v, \varphi(u,v))$ parametriza S. Al desarrollar la fórmula aproximada

$$\alpha(u,v) \approx \alpha(x_o, y_o) + d\alpha_{(x_o,y_o)}(u - x_o, v - y_o),$$

obtenemos

$$\varphi(x,y) \approx \varphi(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Esta última relación nos dice que el plano tangente aproxima a S cerca del punto $(x_o, y_o, \varphi(x_o, y_o))$.

Por otra parte, el plano (4.13) es la imagen de la transformación afín $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(h, k) = \alpha(x_o, y_o) + d\alpha_{(x_o,y_o)}(h, k),$$

(como ejercicio, verificar e interpretar geométricamente).

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.32. Sea S una superficie y sea (x_o, y_o, z_o) un punto de S.

Sea (α, D) una carta de coordenadas de S tal que $(x_o, y_o, z_o) \in \alpha(D)$, sea $(u_o, v_o) \in D$ tal que $\alpha(u_o, v_o) = (x_o, y_o, z_o)$.

El *plano tangente* a S en el punto (x_o, y_o, z_o) es la imagen de la transformación afín $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(h, k) = \alpha(u_o, v_o) + d\alpha_{(u_o,v_o)}(h, k).$$

Ejercicio 4.33. Demostrar que, en la definición anterior, el plano tangente no depende de la carta de coordenadas. Por lo tanto está bien definido.

Observación 4.34. Supongamos que tenemos una superficie S y que (α, D) es una carta de coordenadas de S. Sea $(u_o, v_o) \in D$ y sea $(x_o, y_o, z_o) = \alpha(u_o, v_o)$. Entonces el plano generado por los vectores $d\alpha_{(u_o,v_o)}(e_1) = \alpha_u(u_o, v_o)$ y $d\alpha_{(u_o,v_o)}(e_2) = \alpha_v(u_o, v_o)$ es paralelo al plano tangente a S en (x_o, y_o, z_o).

Observación 4.35. En el caso en que la superficie S está dada en la forma $g(x, y, z) = 0$ (suponemos que ∇g no se anula) tenemos que si $(x_o, y_o, z_o) \in S$ entonces $\nabla g(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal al plano tangente a S en (x_o, y_o, z_o). Por lo tanto el vector $\nabla g(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal a los vectores $\alpha_u(u_o, v_o)$ y $\alpha_v(u_o, v_o)$.

Dicho de otra manera: El complemento ortogonal del subespacio generado por los vectores $\alpha_u(u_o, v_o)$ y $\alpha_v(u_o, v_o)$ es el subespacio generado por $\nabla g(x_o, y_o, z_o)$.

El caso k-dimensional. Vamos a extender los conceptos y resultados de la sección anterior a un número mayor de dimensiones.

Definición 4.36. Supongamos $k < n$. Una *carta de coordenadas* es un par (α, D) donde D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$ y $\alpha : D \to \mathbb{R}^n$ es una función inyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $d\alpha_{\vec{u}}$ es inyectiva para todo $\vec{u} \in D$.

Al igual que en el caso bidimensional tenemos que si (α, D) es una carta de coordenadas, entonces los vectores

$$\alpha_{u_1}(\vec{u}), \dots, \alpha_{u_k}(\vec{u})$$

son linealmente independientes.

Definición 4.37. Sea $k < n$. Una *superficie* (o *variedad diferenciable*) k-dimensional en $\mathbb{R}^n$ es un par $(S, \mathcal{A})$, donde S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A}$ es una colección de cartas de coordenadas, cuyos dominios son subconjuntos de $\mathbb{R}^k$, tales que:

(a) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Imagen}(\alpha) = S$.

(b) Si $(\alpha, D_\alpha), (\beta, D_\beta) \in \mathcal{A}$ y $\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta) \neq \emptyset$ entonces la función

$$\beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(\alpha(D_\alpha) \cap \beta(D_\beta)) \to \mathbb{R}^k$$

es de clase $\mathcal{C}^1$

Tenemos el siguiente resultado, análogo al que ya fue probado en el caso bidimensional. La demostración queda como ejercicio.

Teorema 4.38. *Sea $p < n$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, sea $g : \Omega \to \mathbb{R}^p$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sea*

$$S = \{\vec{x} \in \Omega : g(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

Si $g'(\vec{x})$ tiene rango p para todo $\vec{x} \in S$ entonces S es una variedad diferenciable de dimensión $n - p$.

Definición 4.39. Sea S una variedad diferenciable k-dimensional en $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{x}_o$ un punto de S. Sea (α, D) una carta de coordenadas de S tal que $\vec{x}_o \in \alpha(D)$, sea $\vec{u}_o \in D$ tal que $\alpha(\vec{u}_o) = \vec{x}_o$.

El *espacio tangente* a S en el punto $\vec{x}_o$ es la imagen de la transformación afín $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(\vec{h}) = \alpha(\vec{u}_o) + d\alpha_{\vec{u}_o}(\vec{h}).$$

Ejercicio 4.40. Demostrar que, en la definición anterior, el espacio tangente no depende de la carta de coordenadas. Por lo tanto está bien definido.

Observación 4.41. El espacio tangente a S en el punto $\vec{x}_o$ es un espacio afín, paralelo al subespacio generado por los vectores

$$\alpha_{u_1}(\vec{u}_o), \dots, \alpha_{u_k}(\vec{u}_o).$$

Por lo tanto, el espacio tangente a una variedad k-dimensional es un espacio afín cuya dimensión es k.

Lema 4.42. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, sea $m < n$ y sea $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que los vectores $\nabla g_1(\vec{x}), \ldots, \nabla g_m(\vec{x})$ son linealmente independientes para todo $\vec{x} \in \Omega$.*

Entonces las ecuaciones

$$g_1(\vec{x}) = 0, \ldots, g_m(\vec{x}) = 0$$

definen una superficie $n - m$-dimensional en $\mathbb{R}^n$.

Si un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal al espacio tangente a S en el punto $\vec{x}_o$ entonces existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{z} = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{x_o}).$$

Demostración. Como los vectores $\nabla g_1(\vec{x}), \ldots, \nabla g_m(\vec{x})$ son linealmente independientes para todo $\vec{x} \in \Omega$, tenemos que la matriz $g'(\vec{x})$ tiene rango m para todo $\vec{x} \in \Omega$. Por el Teorema 4.38 tenemos que el conjunto

$$S = \{\vec{x} \in \Omega : g(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión $n - m$.

Sea $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ ortogonal al espacio tangente a S en el punto $\vec{x}_o$. Sea $D \subset \mathbb{R}^{n-m}$ un abierto y sea (α, D) una carta de coordenadas para S tal que $\alpha(\vec{u}_o) = \vec{x}_o$ para algún $\vec{u}_o \in D$. Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tenemos que

$$g_i(\alpha(\vec{u})) = 0,$$

para todo $\vec{u} \in D$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\, g_i(\alpha(\vec{u})) = 0,$$

para todo $\vec{u} \in D$, $j = 1, \ldots, n - m$. Por la regla de la cadena

$$\langle \nabla g_i(\vec{x}_o), \alpha_{u_j}(\vec{u}_o) \rangle = 0,$$

para $j = 1, \ldots, n - m$.

Es decir, los conjuntos $\{\nabla g_1(\vec{x}_o), \ldots, \nabla g_m(\vec{x}_o)\}$ y $\{\alpha_{u_1}(\vec{u}_o), \ldots, \alpha_{u_{n-m}}(\vec{u}_o)\}$ son ortogonales. Como cada uno de estos conjuntos es linealmente independiente tenemos que $\{\nabla g_1(\vec{x}_o), \ldots, \nabla g_m(\vec{x}_o)\}$ es una base del complemento ortogonal del espacio E generado por $\{\alpha_{u_1}(\vec{u}_o), \ldots, \alpha_{u_{n-m}}(\vec{u}_o)\}$.

Por otra parte, el subespacio generado por $\{\alpha_{u_1}(\vec{u}_o), \ldots, \alpha_{u_{n-m}}(\vec{u}_o)\}$ es paralelo al espacio tangente a S en $\vec{x}_o$. Luego, si $\vec{z}$ es ortogonal al espacio tangente a S en $\vec{x}_o$ entonces $\vec{z}$ pertenece al subespacio generado por $\{\nabla g_1(\vec{x}_o), \ldots, \nabla g_m(\vec{x}_o)\}$.

□

8. Multiplicadores de Lagrange.

8.1. Máximos y mínimos con restricciones. En los problemas de búsqueda de máximos y mínimos puede ocurrir que estos valores se alcancen en puntos interiores del dominio. En ese caso se hallan los puntos críticos usando las primeras derivadas (el gradiente), luego usando segundas derivadas (el hessiano) se trata de determinar cuáles son máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

Sin embargo, cuando el punto en el que se alcanza un máximo o un mínimo se encuentra en la frontera la situación es muy distinta. La determinación de esos puntos es un típico problema de multiplicadores de Lagrange.

Los griegos antiguos propusieron el problema de hallar la curva cerrada plana de longitud dada que encerrara mayor área. Este problema es llamado el problema isoperimétrico, y ellos fueron capaces de demostrar en una manera más o menos rigurosa que la respuesta correcta es: el círculo (para más información sobre este aspecto histórico ver Simmons, Differential Equations, pág 367).

Consideremos el siguiente problema: Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$, sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

Supongamos que $g(x, y) = 0$ define una curva C en el plano y que f alcanza un máximo (o un mínimo) en $(x_o, y_o) \in C$.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria diferenciable de una parte de C que contiene a (x_o, y_o). Sea $t_o \in (a, b)$ tal que $\alpha(t_o) = (x_o, y_o)$ entonces $f \circ \alpha$ tiene un máximo (o un mínimo) en t_o. Por lo tanto

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_o) = \langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o)\rangle = \langle \nabla f(x_o, y_o), \alpha'(t_o)\rangle.$$

Es decir, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\alpha'(t_o)$ son ortogonales.

Por otro lado, ya sabemos que $\nabla g(x_o, y_o)$ es ortogonal a C. Así que, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\nabla g(x_o, y_o)$ están en la misma recta. Esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Ejemplo 4.43. De todos los rectángulos de perímetro cuatro ¿Cuál tiene área máxima? Para resolver este problema tendremos que considerar las funciones

$$f(x, y) = xy,$$

$$g(x, y) = 2x + 2y - 4.$$

Entonces

$$\nabla f(x,y) = (y,x),$$

$$\nabla g(x,y) = (2,2).$$

Debemos hallar los puntos (x,y) tales que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Esto es, los puntos (x,y) tales que

$$(y,x) = \lambda(2,2).$$

Tenemos pues: $y = 2\lambda$, $x = 2\lambda$. Y por lo tanto $y = x$.

Pero

$$0 = g(x,y) = 2x + 2y - 4 = 2x + 2x - 4 = 4x - 4.$$

De donde

$$y = x = 1.$$

Así que de todos los rectángulos de perímetro cuatro el cuadrado (de lado uno) es el de mayor área.

8.2. El teorema de Lagrange. Pensemos ahora en el caso de hallar los máximos o los mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$.

Sea

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}.$$

Supongamos que en $(x_o, y_o, z_o) \in S$ se alcanza un máximo o un mínimo. Sea $\alpha : (a,b) \to S$ una trayectoria diferenciable que pasa por (x_o, y_o, z_o).

Si $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ entonces debe ser $(f \circ \alpha)'(t_o) = 0$. Luego

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_o) = \langle \nabla f(a(t_o)), \alpha'(t_o)\rangle = \langle \nabla f(x_o, y_o, z_o), \alpha'(t_o)\rangle.$$

De donde $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ y $\alpha'(t_o)$ son ortogonales, es decir, $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal a S en (x_o, y_o, z_o) .

Luego debe ser

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o, z_o).$$

En general vale el siguiente resultado.

TEOREMA 4.44 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto, sea* m *tal que* $m < n$ *y sea* $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que si* $g = (g_1, \dots, g_m)$ *entonces los vectores* $\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_m(\vec{x})$ *son linealmente independientes para todo* $\vec{x} \in \Omega$.

Sea S *la superficie definida implícitamente por las ecuaciones* $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$, *es decir,*

$$S = \{\vec{x} \in \Omega : g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, si* $f|_S$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\vec{x_o}$ *entonces existen constantes* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{x_o}).$$

DEMOSTRACIÓN EN EL CASO PARTICULAR $m = 2$, $n = 3$.

En este caso S es una superficie de dimensión $3 - 2 = 1$. Sea $\vec{x_o} \in S$ tal que f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un abierto y sea (α, D) una carta para S tal que $\alpha(t_o) = \vec{x_o}$ para algún $t_o \in D$.

Entonces el campo escalar ψ definido en un entorno de 0 por

$$\psi(t) = f(\alpha(t_o + t))$$

alcanza un máximo o un mínimo en 0. Por lo tanto $\psi'(0) = 0$, de donde sigue que

$$\langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = 0,$$

es decir, el vector $\nabla f(\alpha(t_o)) = \nabla f(\vec{x_o})$ es ortogonal al espacio (recta) tangente a S en $\vec{x_o}$. Por lo tanto (ver Lema 4.42) $\nabla f(\vec{x_o})$ está en el subespacio generado por $\nabla g_1(\vec{x_o})$ y $\nabla g_2(\vec{x_o})$. □

DEMOSTRACIÓN EN EL CASO PARTICULAR $m = 1$, $n = 3$.

En este caso S es una superficie de dimensión $3 - 1 = 2$. Sea $\vec{x_o} \in S$ tal que f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea (α, D) una carta para S tal que $\alpha(u_o, v_o) = \vec{x_o}$ para algún $(u_o, v_o) \in D$.

Entonces los campos escalares ψ_1 y ψ_2 definidos en un entorno de 0 por

$$\psi_i(t) = f(\alpha((u_o, v_o) + te_i))$$

alcanzan un máximo o un mínimo en 0. Por lo tanto $\psi_i'(0) = 0$, $i = 1, 2$, de donde sigue que

$$\langle \nabla f(\alpha((u_o, v_o)), \alpha_u(u_o, v_o) \rangle = 0,$$

$$\langle \nabla f(\alpha((u_o, v_o)), \alpha_v(u_o, v_o) \rangle = 0,$$

es decir, el vector $\nabla f(\alpha((u_o, v_o)) = \nabla f(\vec{x_o})$ es ortogonal al plano tangente a S en $\vec{x_o}$. Por lo tanto (ver Observación 4.35) $\nabla f(\vec{x_o})$ está en el subespacio generado por $\nabla g(\vec{x_o})$.

□

Demostración en el caso general.

En este caso S es una superficie de dimensión $k = n - m$. Sea $\vec{x_o} \in S$ tal que f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$. Sea $D \subset \mathbb{R}^k$ un abierto y sea (α, D) una carta para S tal que $\alpha(\vec{u}_o) = \vec{x_o}$ para algún $\vec{u}_o \in D$.

Para $i = 1, \ldots, k$ sea ψ_i el campo escalar definido en un entorno de 0 por

$$\psi_i(t) = f(\alpha(\vec{u}_o + te_i)).$$

Tenemos que ψ_i alcanza un máximo o un mínimo en 0. Por lo tanto $\psi_i'(0) = 0$, de donde sigue que

$$\langle \nabla f(\alpha(\vec{u}_o)), \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}(\vec{u}_o) \rangle = 0,$$

para $i = 1, \ldots, k$.

Por lo tanto el vector $\nabla f(\alpha(\vec{u}_o)) = \nabla f(\vec{x_o})$ es ortogonal al espacio tangente a S en $\vec{x_o}$.

Del Lema 4.42 sigue el resultado.

□

Ejemplo 4.45. Encontrar la distancia mínima entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$.

La función a minimizar es

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 1$, $u + v = 4$.

Sean

$$g_1(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - 1,$$
$$g_2(x, y, u, v) = u + v - 4.$$

Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, u, v) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, u, v) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, u, v), \\ g_1(x, y, u, v) = 0, \\ g_2(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y,u,v) &= (2(x-u), 2(y-v), -2(x-u), -2(y-v)),\\
\nabla g_1(x,y,u,v) &= (2x, 2y, 0, 0),\\
\nabla g_2(x,y,u,v) &= (0,0,1,1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases}
(2(x-u), 2(y-v), -2(x-u), -2(y-v)) = \lambda_1(2x,2y,0,0) + \lambda_2(0,0,1,1)\\
x^2+y^2 = 1\\
u+v = 4
\end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases}
2(x-u) = 2\lambda_1 x\\
2(y-v) = 2\lambda_1 y\\
-2(x-u) = \lambda_2\\
-2(y-v) = \lambda_2\\
x^2+y^2 = 1\\
u+v = 4
\end{cases}$$

De la tercera y la cuarta ecuación obtenemos $x-u = y-v$.

De la primera y la segunda obtenemos $\lambda_1 x = \lambda_1 y$. Como las curvas no se cortan $\lambda_1 \neq 0$. Luego $x=y$, de donde $u=v$.

Y así $x=y=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$ ó $x=y=-1/\sqrt{2}=-\sqrt{2}/2$, además $u=v=2$.

Luego los puntos más cercanos son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{y} \quad (2,2).$$

La distancia mínima es

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{2\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\
&= 2\sqrt{2}-1.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.46. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x+y+z$ sujeta a las condiciones $x^2+y^2=2$, $x+z=1$.

Sean

$$
\begin{aligned}
g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2, \\
g_2(x, y, z) &= x + z - 1.
\end{aligned}
$$

Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z), \\
g_1(x, y, z) = 0, \\
g_2(x, y, z) = 0.
\end{cases}
$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x, y, z) &= (1, 1, 1), \\
\nabla g_1(x, y, z) &= (2x, 2y, 0), \\
\nabla g_2(x, y, z) &= (1, 0, 1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el sistema que debemos resolver es:

$$
\begin{cases}
\lambda_1 (2x, 2y, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1) = (1, 1, 1), \\
x^2 + y^2 = 2, \\
x + z = 1.
\end{cases}
$$

o equivalentemente

$$
\begin{cases}
2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1 \\
2\lambda_1 y = 1 \\
\lambda_2 = 1 \\
x^2 + y^2 = 2 \\
x + z = 1
\end{cases}
$$

Así que

$$
\lambda_2 = 1, \quad 2\lambda_1 x = 0 \quad \text{y} \quad 2\lambda_1 y = 1.
$$

De donde $\lambda_1 \neq 0$. Y por lo tanto $x = 0$, $z = 1$.

Se sigue que $y = \sqrt{2}$ ó $y = -\sqrt{2}$.

Tenemos pues que $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ son los puntos a considerar.

Sustituyendo en la fórmula para f observamos que el primero es un máximo y el segundo es un mínimo.

EJEMPLO 4.47 (Caso en el que el método de Lagrange no es aplicable). Si ∇g_1 y ∇g_2 son linealmente dependientes el método de Lagrange puede fallar, tal como lo ilustra el ejemplo que desarrollaremos a continuación.

Supongamos que intentamos la aplicación del método de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ en la curva de intersección de las dos superficies $z = 0$, $z^2 - (y-1)^3 = 0$.

Sean

$$g_1(x,y,z) = z,$$
$$g_2(x,y,z) = z^2 - (y-1)^3.$$

Las dos superficies, un plano y un cilindro, se cortan a lo largo de la recta C dibujada en la figura.

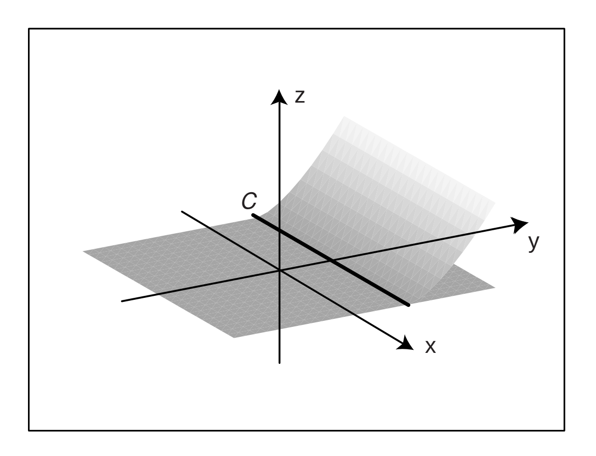


FIGURA 4.7.

El problema tiene evidentemente una solución, debido a que $f(x,y,z)$ representa la distancia del punto (x,y,z) al eje z y esta distancia es un mínimo sobre C cuando el punto es $\vec{x_0} = (0,1,0)$.

Sin embargo, en este punto los vectores gradientes son

$$\nabla g_1(\vec{x_0}) = (0,0,1),$$
$$\nabla g_2(\vec{x_0}) = (0,0,0),$$
$$\nabla f(\vec{x_0}) = (0,2,0).$$

y está claro que no existen escalares λ_1 y λ_2 que satisfagan la ecuación

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_0}).$$

Ejercicios 4.

(1) Utilizar el método de la tangente de Newton modificado para construir una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt{3}$.

(2) Sea $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   (a) Demuestre que para todo punto $(x_o, y_o) \neq (0,0)$ la restricción de f a un entorno de (x_o, y_o) tiene inversa.
   (b) Demuestre que si no se restringe su dominio, f no tiene inversa.
   (c) Si f^{-1} es la inversa de f en un entorno del punto $(1,2)$, halle la transformación afín que aproxima mejor a f^{-1} cerca de $f(1,2) = (-3,4)$.

(3) Encuentre la función afín que aproxima mejor a la inversa de la función $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$, cerca del punto f(1,1). Note que no es fácil hallar f^{-1}.

(4) Sea $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ y sea $T : D \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

   (a) Hallar $dT_{(r,\theta)}$ y su inversa en los puntos que exista.
   (b) Hallar una expresión explícita para T^{-1}, aclarando cuál debe ser su dominio. ¿Qué puede decir de la continuidad de T^{-1}?

(5) Sea $U = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi/2\}$ y sea $T : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho,\theta,\phi) = (\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi).$$

   (a) Hallar $dT_{(\rho,\theta,\phi)}$ y su inversa en los puntos que exista.
   (b) Hallar una expresión explícita para T^{-1}, aclarando cuál debe ser su dominio. ¿Qué puede decir de la continuidad de T^{-1}?

(6) Si

$$\begin{cases} x = u + v + w, \\ y = u^2 + v^2 + w^2, \\ z = u^3 + v^3 + w^3. \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ en la imagen $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ de $(u, v, w) = (1, 2, -1)$.

(7) Sea $f(u, v) = (u^2 + u^2 v + 10v, u + v^3)$.
   (a) Demuestre que f tiene una inversa f^{-1} en un entorno del punto $(1, 1)$.
   (b) Encontrar un valor aproximado de $f^{-1}(11.8, 2.2)$

(8) Supongamos que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son campos escalares diferenciables. Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z) + g(x, y, z))$$

no puede tener una inversa diferenciable.

(9) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Demostrar que df_0 es inyectiva y por lo tanto invertible.
   (b) Demostrar que f no tiene inversa en ningún entorno de 0
   (c) ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema de la función inversa?

(10) El punto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisface las ecuaciones

$$xyt + \operatorname{sen} xyt = 0 \qquad x + y + t = 0.$$

¿Están x e y definidas implícitamente como funciones de t en un entorno de -1?

(11) En los siguientes casos, demostrar que la solución de la ecuación $F(x, y) = 0$ se puede representar en la forma $y = f(x)$, en un entorno del punto (x_o, y_o). Calcular $f'(x_o)$ en cada caso. Si es posible, hacer una representación gráfica.

(a) $F(x,y) = x + y + x \operatorname{sen} y$, para $(x_o, y_o) = (0,0)$.

(b) $F(x,y) = xe^y - y + 1$, para $(x_o, y_o) = (-1,0)$.

(c) $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4$, para $(x_o, y_o) = (1, 3\sqrt{3})$.

(d) $F(x,y) = xy + x\ln(xy) - 1$, para $(x_o, y_o) = (1,1)$.

(12) Encontrar un ejemplo de un campo escalar F, definido en un subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ y de clase $\mathcal{C}^1$, tal que para algún $(x_o, y_o, z_o) \in D$ se tiene que:
(a) $F(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(b) $F_x(x_o, y_o, z_o) = F_y(x_o, y_o, z_o) = F_z(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(c) Es posible representar la solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en la forma $z = f(x,y)$, en un entorno del punto (x_o, y_o, z_o).

(13) Encontrar un ejemplo de un campo escalar F, definido en un subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ y de clase $\mathcal{C}^1$, tal que para algún $(x_o, y_o, z_o) \in D$ se tiene que:
(a) $F(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(b) $F_x(x_o, y_o, z_o) = F_y(x_o, y_o, z_o) = F_z(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(c) No es posible representar la solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en la forma $z = f(x,y)$, en un entorno del punto (x_o, y_o, z_o).

(14) Resolver los análogos de los problemas 12 y 13 para el caso de un campo escalar $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ definido en $\mathbb{R}^{n+1}$.

(15) En los siguientes casos, demostrar que el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$, se puede representar en la forma $y = f(x)$, $z = g(x)$ en un entorno del punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, donde f y g son funciones diferenciables en un entorno del punto x_o.

(a) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$, $G(x,y,z) = 2x - y + z - 1$, para $P_o = (2,1,-2)$.

(b) $F(x,,y,z) = x^2 - xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2 - 10$, $G(x,y,z) = xyz - 6$, para $P_o = (2,3,1)$.

(16) En los siguientes casos, demostrar que el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen las ecuaciones $F(x,y,u,v)=0$ y $G(x,y,u,v)=0$, se puede representar en la forma $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ en un entorno del punto $P_o=(x_o,y_o,u_o,v_o)$, donde f y g son funciones diferenciables en un entorno del punto (x_o,y_o).

(a) $F(x,y,u,v)=x^2-y^2+uv-v^2+3$, $G(x,y,u,v)=x+y^2+u^2+uv-2$, para $P_o=(2,1,-1,2)$.

(b) $F(x,,y,u,v)=2x-y+2u-v$, $G(x,y,u,v)=3x+2y+u+v$, para $P_o=(0,0,0,0)$.

(17) Demostrar que un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión k.

(18) Encontrar los puntos en los cuales la siguiente función alcanza su valor más grande y más pequeño.
$f(x,y)=x^2+24yx+8y^2$ en la región $x^2+y^2\leq 25$.

(19) Una caja rectangular sin tapa ha de tener una superficie de área S. Encontrar las dimensiones de la caja de máximo volumen.

(20) Encontrar los puntos más lejanos del origen que están en la curva
$x=\cos t, y=\operatorname{sen} t, z=\operatorname{sen}(t/2)$.

(21) Encontrar el valor máximo de la función $f(x,y,z) = x(y+z)$ dado que $x^2+y^2=1, xz=1$.

(22) Sea $f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$. Demostrar que sobre toda recta $y=mx$ la función tiene un mínimo en $(0,0)$ pero que no existe mínimo en ningún entorno bidimensional.

(23) Determinar los valores extremos absolutos y relativos y los puntos de ensilladura para la función $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ en el cuadrado $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$.

(24) Encuentre la distancia del punto $(2,-3,1)$ al plano de ecuación $z=2x+5y-3$.

(25) Hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

(26) Hallar los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(27) Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

Para facilitar el trabajo del estudiante recordamos los principales teoremas que se necesitan para poder resolver estos problemas.

Estos son: el teorema de la función inversa, el teorema de la función implícita y el teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Teorema de la función inversa:

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\vec{x}_o \in D$ tal que $f'(\vec{x}_o)$ tiene inversa. Entonces existe un conjunto abierto $U \subset D$ tal que:

(a) $\vec{x}_o \in U$.
(b) $f(U)$ es abierto.
(c) $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva y su inversa $g : f(U) \to U$ es de clase $\mathcal{C}^1$.
(d) Si $\vec{x} \in U$ entonces $f'(x)$ es invertible y

$$g'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$$

para todo $\vec{x} \in U$.

(e) La inversa local $g : V \to U$ es el límite de la sucesión $\{g_k\}$ de aproximaciones sucesivas definidas inductivamente por

$$g_1(\vec{y}) = \vec{x}_o, \qquad g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f'(\vec{x}_o)^{-1}[\,f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,]$$

para $\vec{y} \in V$.

Teorema de la función implícita:

Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un abierto y $F : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si para algún $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y algún $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^m$ se tiene que

(i) $F(\vec{x_0}, \vec{y_0}) = \vec{0}$.

(ii) $F_{\vec{y}}(\vec{x_0}, \vec{y_0})$ tiene inversa .

Entonces existe un entorno B de $\vec{x_0}$, un entorno V de $(\vec{x}_o, \vec{y}_o)$ y una función $f : B \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

(a) $f(\vec{x_0}) = \vec{y_0}$,

(b) $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in D$ para todo $\vec{x} \in B$,

(c) $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in B$,

(d) Si $\vec{x} \in B$ entonces la ecuación

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

para $(\vec{x}, \vec{y}) \in V$, tiene solución única y está dada por

$$\vec{y} = f(\vec{x}).$$

Además

$$f'(\vec{x}) = -(F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})))^{-1} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x}))$$

para todo $\vec{x} \in B$.

Teorema de los multiplicadores de Lagrange:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, sea m tal que $m < n$ y sea $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que si $g = (g_1, \ldots, g_m)$ entonces los vectores $\nabla g_1(\vec{x}), \ldots, \nabla g_m(\vec{x})$ son linealmente independientes para todo $\vec{x} \in \Omega$.

Sea S la superficie definida implícitamente por las ecuaciones $g_1(\vec{x}) = 0, \ldots, g_m(\vec{x}) = 0$, es decir,

$$S = \{\vec{x} \in \Omega : g_1(\vec{x}) = 0, \ldots, g_m(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, si $f|_S$ alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$ entonces existen constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{x_o}).$$

Bibliografía

[1] Apostol,T. *Mathematical Analysis.*

[2] Cohen, L. and Ehrlich, G. *The structure of the real number system.* Van Nostrand 1963.

[3] Edwards, C.H. *Advanced Calculus of Several Variables.*

[4] Goldberg. *Methods of Real Analysis.*

[5] Halmos, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* CECSA 1971.

[6] O.E.A. *Introducción a la Topología General, No 9 de la Serie de Matemática de la O.E.A.*

[7] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[8] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis. Second Edition.* McGraw-Hill 1964.

[9] Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis.*

[10] Spivak. *Cálculo en Variedades.*

[11] Stromberg, H. *An Introduction to Classical Real Analysis.*

[12] White, A. *Real Analysis: An Introduction.*

[13] Williamson, Crowell, Trotter. *Cálculo de Funciones Vectoriales.*

Índice